

جامعة الزقازيق

كلية العلوم

قسم الرياضيات

# رياضيات عامة

(ر ١٠٥)

٢٠١٥



## مقدمة

أصبحت أساليب الرياضيات الحديثة من الوسائل والأدوات القوية الفعالة في حل الكثير من المشكلات.

وفي العصر الحديث أصبحت صياغة مشكلة ما صياغة رياضية أو نمذجتها بالشكل الرياضي مقياسا لتقدم وتطور العلوم في هذا المجال.

ومن الجدير بالذكر أن هذه الأساليب لا تعطى النتائج المرجوة منها إلا عن وعي تام بقواعد التحليل الرياضي. لذلك فإننا نقدم هذا الكتاب كمقدمة في الرياضيات تحت مسمى رياضيات عامة (١) لطلاب السنة الأولى من كليات العلوم شعبة العلوم وما في مستواها إذ يلعب التفاضل والتكامل دورا هاما وكبيراً في كثير من مجالات العلوم في الهندسة والفيزياء والاقتصاد وعلوم أخرى حديثة مثل التحكم الأمثل وغيره.

كما يعتبر علم الجبر أساسا لتطور الكثير من العلوم كذلك الهندسة لما لها من تطبيقات حياتية هامة. ويحتوى هذا الكتاب على أربعة أجزاء هامة هي التفاضل والتكامل والجبر والهندسة التحليلية.

اختيرت محتوياتها بالشكل الذى يساعد الطالب ويقدم له النفع عند دراسة مقررات أخرى في الرياضيات والكيمياء والفيزياء.

ومن المعلوم أن مقررات الرياضيات هي مقررات تراكمية يحتاج الطالب فيها للكثير مما درسه في المراحل السابقة. لذلك أضفنا في نهاية الكتاب عدة ملاحق تحتوى الكثير من القواعد والقوانين والنظريات التى درست في المراحل الدراسية السابقة والضرورية لدراسة هذا المقرر.

وقد حرصنا على أن تكون الأمثلة والتمارين في كل موضوع كثيرة ومتنوعة تمكن الطالب من فهم الموضوع ومتابعته جيدا، كذلك يتمكن من التمرن على حل المسائل بشكل يعينه على التعمق في فهم الموضوع.

وبطيب لنا أن نقدم خالص شكرنا وتقديرنا لكل من ساعد في اخراج هذا الكتاب في الشكل المرجو منه.

وفي الختام نسأل الله العلي القدير أن ينفع بهذا الكتاب كل من يطلب فيه النفع والله من وراء القصد وهو يهدي السبيل.

قسم الرياضيات

كلية العلوم - جامعة الزقازيق

### تحذير

محظور تصوير أو طباعة هذا الكتاب أو  
أى جزء منه إلا بعد موافقة كتابية من  
الأستاذ الدكتور / رئيس قسم الرياضيات،  
ومن يخالف ذلك يتحمل المسؤولية  
القانونية.



| الصفحة | الموضوع                           |
|--------|-----------------------------------|
| ٣      | مقدمة الكتاب                      |
| ٥      | المحتويات                         |
|        | أولاً: التفاضل                    |
| ٨      | - اتصال الدوال                    |
| ١٥     | - مشتقات الدوال                   |
| ١٦     | - المعنى الهندسى للمشتقة الأولى   |
| ١٧     | - القواعد الأساسية للتفاضل        |
| ٢٢     | - مشتقات الدوال الأولية           |
| ٢٣     | - مشتقات الدوال المتتالية         |
| ٢٥     | - مشتقات الدوال المتتالية العكسية |
| ٣٠     | - مشتقات الدوال اللوغاريتمية      |
| ٣٢     | - مشتقات الدوال الأسية            |
| ٣٤     | - المشتقة ذات الرتبة $n$          |
| ٣٨     | - تطبيقات التفاضل                 |
| ٣٨     | - قاعدة لوبيتال                   |
| ٤٣     | - مفكوك تيلور وماكلورين           |
|        | ثانياً: التكامل                   |
| ٥١     | - التكامل غير المحدد              |
| ٥٤     | - صيغ التكاملات الأساسية          |

| الموضوع                           | الصفحة |
|-----------------------------------|--------|
| - طرق التكامل                     | ٥٩     |
| - التكامل بالتعويض                | ٥٩     |
| - التكامل باستخدام الكسور الجزئية | ٦٣     |
| - التكامل بالتجزئ                 | ٧٠     |
| - التكامل المحدد                  | ٧٥     |
| - تطبيقات التكامل المحدد          | ٧٨     |
| - حساب مساحات المناطق المستوية    | ٧٨     |
| - حساب أطوال المنحنيات            | ٨٥     |
| <b>ثالثاً: الجبر</b>              |        |
| - الأعداد المركبة                 | ٩٠     |
| - نظرية المعادلات                 | ١٠٤    |
| - المحددات                        | ١٢٠    |
| - المصفوفات                       | ١٣٤    |
| <b>رابعاً: الهندسة التحليلية</b>  |        |
| - تغيير محوري الإحداثيات          | ١٥٢    |
| - القطاعات المخروطية              | ١٥٧    |
| ① القطع المكافئ                   | ١٥٨    |
| ② القطع الناقص                    | ١٦٦    |
| ③ القطع الزائد                    | ١٧٨    |
| - ملاحق الكتاب                    | ١٨٨    |

# الجزء الأول

## التفاضل وتطبيقاته

### DIFFERENTIATION AND ITS APPLICATIONS

الباب الأول: اتصال الدوال

الباب الثاني : مشتقات الدوال

الباب الثالث: تطبيقات التفاضل



# الباب الأول

## اتصال الدوال

أولاً: اتصال الدالة عند نقطة:

تعريف: يقال للدالة  $f(x)$  أنها متصلة عند النقطة  $x=a$  إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية:-

١- أن تكون الدالة معرفة عند النقطة  $x=a$  أى لها قيمة عند النقطة  $x=a$ .

٢- أن تكون نهاية الدالة  $f(x)$  موجودة عندما  $x \rightarrow a$  بمعنى أن النهاية

اليمنى تساوى النهاية اليسرى عندما  $x \rightarrow a$  أى أن

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

٣- أن يكون  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

ويمكن جمع الثلاث شروط فى شرط واحد وهو

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

مثال (١): ابحث اتصال الدالة

$$\text{عند } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} & x \neq 5 \\ 3 & x = 5 \end{cases}$$

النقطة  $x=5$

الحل: الدالة  $f(x)$  معرفة عند  $x=5$  وقيمتها تساوى 3 أى أن

$$f(5) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$$

بالضرب فى مرافق البسط يكون

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \frac{1}{4}$$

واضح أن

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \frac{1}{4} \neq f(5) = 3$$

النهاية عندما  $x \rightarrow 5$  لا تساوى قيمة الدالة عند  $x=5$  وبالتالي الدالة ليست متصلة عند النقطة  $x=5$ .

مثال (٢): ابحث اتصال الدالة  $f(x)$  حيث

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x \tan 4x}{6x^2} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

عند النقطة  $x=0$

الحل:

١- الدالة معرفة عند  $x=0$  وقيمتها تساوى 2 أى أن  $f(0)=2$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \tan 4x}{6x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{6x} \cdot \frac{\tan 4x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{6x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{x} \\ &= \frac{3}{6} \cdot 4 = 2 \end{aligned}$$

من (١)، (٢) الدالة  $f(x)$  متصلة عند  $x=0$

مثال (٣): ابحث اتصال الدالة  $f(x)$  حيث

$$f(x) = x|x-2| + 3$$

عند النقطة  $x=2$

الحل: يمكن كتابة الدالة  $f(x)$  بالصورة

$$f(x) = \begin{cases} x(x-2) + 3 & x \geq 2 \\ -x(x-2) + 3 & x < 2 \end{cases}$$

١- الدالة معرفة عند  $x=2$  وتساوى 3

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} x(x-2) + 3 = 3 \quad \text{النهاية اليمنى} \quad -٢$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} -x(x-2) + 3 = 3 \quad \text{النهاية اليسرى}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 \text{ إذن النهاية موجودة } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$$

من (١)، (٢) الدالة متصلة عند  $x = 2$

ملاحظة إذا كانت الدالة غير متصلة عند  $x = a$  وكان المطلوب إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند  $x = a$  نبحث وجود النهاية  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  فإذا كانت النهاية

ليس لها وجود فإن الدالة لا يمكن إعادة تعريفها لتصبح متصلة عند  $x = a$  أى تظل هذه الدالة غير متصلة.

أما إذا كانت النهاية  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  لها وجود أى  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  فإنه يمكن

إعادة تعريف الدالة بحيث تصبح متصلة عند  $x = a$  كالتالى

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ \ell & x = a \end{cases}$$

مثال (٤): أعد إن أمكن تعريف الدالة  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{|x + 3|}$  بحيث تصبح متصلة

عند  $x = -3$

لاحظ أن  $x = -3$  لا تنتمي إلى مجال الدالة  $f(x)$  أى أن الدالة غير معرفة

وبالتالى غير متصلة عند  $x = -3$

نبحث وجود النهاية عندما  $x \rightarrow -3$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \begin{cases} \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} & x \geq -3 \\ \frac{(x-3)(x+3)}{-(x+3)} & x < -3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -6 & x \geq -3 \\ 6 & x < -3 \end{cases}$$

إن النهاية غير موجودة وبالتالي لا يمكن إعادة تعريف الدالة عند  $x = -3$  لتصبح متصلة.

مثال (٥): أوجد قيمة الثابت  $k$  التي تجعل الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x^7 - 1 & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases}$$

متصلة عند النقطة  $x = 1$ .

الحل: الدالة معرفة عند  $x = 1$  وقيمتها  $k$  أي  $f(1) = k$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - 1^7}{x^5 - 1^5} \\ &= \frac{7}{5} (1)^{7-5} = \frac{7}{5} \end{aligned}$$

بما أن الدالة متصلة عند  $x = 1$  ،  $f(1) = k$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$$

$$f(1) = k = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{7}{5}$$

$$k = \frac{7}{5}$$

إن

بعض أمثلة الدوال المتصلة:

١- الدالة كثيرة الحدود متصلة على  $R$  أو على فترة تعريفها.

٢- الدالة الكسرية الجبرية متصلة على  $R$  عدا عند أصفار المقام.

٣- الدوال المثلثية

٤-  $\sin x$  ،  $\cos x$  كل منهما متصلة على  $R$

٥- الدالة  $\tan x$  متصلة على  $R - \left\{ x : x = \frac{\pi}{2} + n\pi \right\}$  حيث  $n$  عدد صحيح.

ثانياً: اتصال الدالة على فترة.

تعريف (١) إذا كانت الدالة  $f(x)$  معرفة على الفترة  $]a, b[$  فإننا نقول إن  $f$  متصلة على هذه الفترة إذا كانت متصلة عند كل نقطة من نقاط هذه الفترة.

(٢) إذا كانت الدالة  $f(x)$  معرفة على الفترة  $[a, b]$  فإننا نقول أن  $f$  متصلة على هذه الفترة إذا كانت

أ-  $f$  متصلة على الفترة  $]a, b[$

ب-  $f$  متصلة من اليمين عند  $x = a$  أى أن

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

ج-  $f$  متصلة من اليسار عند  $x = b$  أى أن

$$f(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$$

نظرية: إذا كانت الدالتان  $f_1, f_2$  متصلتين على فترة ما فإن

$$f_1 \pm f_2, \quad f_1 \cdot f_2$$

متصلتين على نفس الفترة

$\frac{f_1}{f_2}(x)$  متصلة على نفس الفترة عدا عند أصفار المقام

$$f_2(x) = 0 \quad \text{أى عدا عند}$$

مثال: أبحث اتصال الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 0 \\ \frac{|x| + 1}{x + 2} & x \geq 0 \end{cases}$$

على مجالها

الحل:

أولاً: نبحث الاتصال على الفترات الجزئية المفتوحة للمجال فى الفترة  $]-\infty, 0[$

الدالة  $f(x) = x^2 + 1$  وهى كثيرة حدود وبالتالي فهى متصلة على هذه الفترة.

فى الفترة  $]0, \infty[$  الدالة  $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$

نلاحظ أن  $x = -2$  لا تنتمي للفترة  $]0, \infty[$

ثانياً: بحث اتصال الدالة عند النقطة الفاصلة  $x = 0$

$$f(0) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 0 \\ \frac{|x| + 1}{x + 2} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x+2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

وبالتالي فالدالة ليست متصلة عند الصفر وبالتالي الدالة متصلة على  $\mathbb{R} - \{0\}$

تمارين

١- ابحث اتصال كل من الدوال الآتية عند النقطة المبينة.

$$(i) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & x \neq 3 \\ 6 & x = 3 \end{cases}$$

عند  $x = 3$

$$(ii) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x+3}}{x+1} & x \neq -1 \\ \frac{1}{2} & x = -1 \end{cases}$$

عند  $x = -1$

$$(iii) f(x) = \begin{cases} \frac{x + 2 \sin 3x}{\sin 5x} & x \neq 0 \\ \frac{7}{5} & x = 0 \end{cases}$$

عند  $x=0$

$$(iv) \quad f(x) = \begin{cases} |x-2| + 2x & x \leq 2 \\ 4x - x^2 & x > 2 \end{cases}$$

عند  $x=2$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 8x - 3}{x-3} & x \neq 3 \\ k & x = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{٢- عين الثابت } k \text{ لكي تكون الدالة} \\ \text{متصلة عند } x=3 \end{array}$$

$x=3$

متصلة عند

٣- أعد تعريف الدالة

$$f(x) = \frac{|x+4|}{x+4} + 3$$

لكي تكون متصلة إن أمكن عند  $x=-4$

٤- ابحث اتصال كل من الدوال الآتية على مجالها

$$(i) \quad f(x) = -4,$$

$$(ii) \quad f(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$(ii) \quad f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$(iv) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x+3)}{2x+6} & x < -3 \\ 1/2 & x \geq -3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x + \sin 2x}{\sin 3x} & -\pi/6 < x < 0 \\ \frac{1}{3} + \cos 3x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \end{cases}$$



## الباب الثانى

### مشتقات الدوال (Derivatives of functions)

#### مفهوم التفاضل (الإشتقاق)

إن مشتقات الدوال من أهم الأفكار المفيدة فى الرياضيات وتطبيقاتها. بفرض أن  $y=f(x)$  دالة حقيقية معرفة على فترة ما، فإذا حدث تغير فى  $x$  مقداره  $\Delta x = h$  (أى أن  $x \rightarrow x+h$ ) فإنه يحدث تغير فى  $y$  مقداره  $\Delta y$  (أى أن  $y \rightarrow y+\Delta y = f(x+h)$ ). وبالتالي فإن مقدار التغير فى  $y$  يعطى بـ  $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ . بقسمة الطرفين على  $\Delta x$  نحصل على

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

وتعطى متوسط التغير فى  $y$  بالنسبة إلى  $x$ . بأخذ النهاية عندما

$h \rightarrow 0$  نحصل على

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

وتعطى هذه النهاية معدل تغير  $y=f(x)$  بالنسبة إلى  $x$  ويرمز

لها بالرمز  $\frac{dy}{dx}$  أو  $y'(x)$  وتسمى مشتقة الدالة  $f(x)$  بالنسبة إلى  $x$ .

وبالتالى فإن تفاضل الدالة  $f(x)$  عند أى نقطة  $x$  يرمز لها بالرمز

$f'(x)$  وتعطى بالعلاقة

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (1)$$

ويقال أن الدالة  $f(x)$  قابلة للتفاضل differentiable إذا كانت النهاية

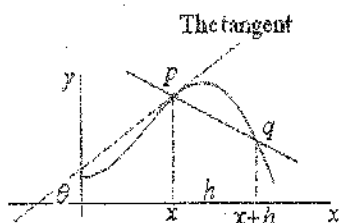
(1) موجودة. ويقال أن الدالة غير قابلة للتفاضل nondifferentiable

عند النقاط التي عندها النهاية غير موجودة. ونرمز للمشتقة الثانية بالرمز  $y''$  وكذلك المشتقة ذات الرتبة  $n$  بالرمز  $y^{(n)}$ .  
المعنى الهندسي للمشتقة الأولى:

إذا رسمنا منحنى الدالة  $y = f(x)$  وحددنا عليه النقطة  $P(x, f(x))$  ثم أخذنا نقطة مجاورة على المنحنى  $Q(x+h, f(x+h))$  فإن القيمة

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$$

تمثل ميل المستقيم الواصل بين النقطتين  $p, q$  (أى ظل الزاوية التي يحصرها المستقيم  $pq$  مع الاتجاه الموجب لمحور  $x$ ). وعندما  $h \rightarrow 0$  (أى عندما تقترب  $h$  من الصفر) فإن



$x+h$  تقترب من  $x$  ومن ثم فإن النقطة  $q$  تقترب من النقطة  $p$  وينطبق المستقيم  $pq$  على المماس عند النقطة  $p$ .

بفرض أن المماس (tangent) عند النقطة  $p$  يصنع زاوية  $\theta$  مع الاتجاه الموجب لمحور  $x$  فإن

$$\tan \theta = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$$

ومن تعريف المشتقة يمكن القول أن المشتقة  $f'(x)$  تساوى ميل المماس للمنحنى عند النقطة  $p$ . وبالتالي فإن المعنى الهندسي للمشتقة

الأولى للدالة  $f(x)$  عند النقطة  $(a, f(a))$  هو ميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة.

نظرية (بدون برهان): إذا كانت الدالة  $y = f(x)$  قابلة للاشتقاق عند نقطة  $x = a$  فإنها تكون متصلة عند نفس النقطة.

لاحظ أن: عكس هذه النظرية ليس صحيحا بمعنى أنه إذا كانت الدالة  $y = f(x)$  متصلة عند نقطة ما فليس بالضرورة أن تكون هذه الدالة قابلة للتفاضل عندها.

سوف نقدم هنا القواعد الأساسية للتفاضل والتي تمت دراستها في المرحلة الثانوية

### القواعد الأساسية للتفاضل:

قواعد التفاضل التي سنتعرض لها هنا تطبق فقط على الدوال القابلة للاشتقاق. إذا كانت الدالتان  $f_1(x), f_2(x)$  قابلتين للتفاضل فإن:

(١) مشتقه مجموع الدالتين :

$$(1) [f_1(x) \pm f_2(x)]' = f_1'(x) \pm f_2'(x)$$

(٢) مشتقة حاصل ضرب الدالتين :

$$(2) [f_1(x) \cdot f_2(x)]' = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x)$$

(٣) مشتقة خارج قسمة الدالتين :

$$(3) \left[ \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right]' = \frac{f_1'(x) \cdot f_2(x) - f_1(x) \cdot f_2'(x)}{f_2^2(x)}, \quad f_2(x) \neq 0$$

(٤) مشتقة حاصل ضرب عدد محدود من الدوال:

وذلك بتعميم القانون السابق لحاصل ضرب أى عدد محدود من

$$y = f(x) \cdot g(x) \cdot w(x) \cdots r(x)$$

الدوال فإذا كانت

$$\frac{dy}{dx} = y \left[ \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} + \frac{w'(x)}{w(x)} + \dots + \frac{r'(x)}{r(x)} \right] \quad \text{فإن}$$

٥) تفاضل دالة الدالة (قاعدة السلسلة) Chain Rule

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{فإن } u = g(x) \text{ وكانت } y = f(u)$$

$$\text{مثال (١) أوجد } \frac{dy}{dt} \text{ إذا كان } x = 3t^2 - 1, \quad y = x^3 - 2x + 1,$$

الحل باستخدام قاعدة السلسلة نحصل على

$$\frac{dx}{dt} = 6t, \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = (3x^2 - 2) \cdot 6t$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = 6t[3(3t^2 - 1)^2 - 2]$$

٦) تفاضل الدوال الضمنية (التفاضل الضمني) Implicit differentiation

$$\text{الدوال مثل } y = x^3 + x^2 + 2, \quad y = \sqrt{x^2 + 9}, \quad y = \log(x^2 - 1)$$

تسمى دوال صريحة explicit functions (ودائما نعني بكلمة دالة الدالة الصريحة) لأنها تعبر عن  $y$  بدلالة  $x$  بصورة صريحة. ولكن إذا كانت العلاقة بين  $x, y$  تنتج أكثر من دالة في نفس الفترة كالعلاقة

$$y^2 + x^2 = 16 \text{ فإنها تسمى دالة ضمنية implicit function. حيث أننا}$$

$$\text{نحصل من هذه العلاقة على الدالتين } y = \sqrt{16 - x^2}, \quad y = -\sqrt{16 - x^2}$$

وعموما الدوال الضمنية هي التي على الصورة  $f(x, y) = 0$

ولإيجاد تفاضل الدالة الضمنية، نأخذ تفاضل المعادلة  $f(x, y) = 0$

بالنسبة إلى  $x$  ثم نحصل على  $y'$  التي تكون عادة دالة في  $(x, y)$ .

فمثلا للحصول على مشتقة الدالة  $y^2 + xy + x^2 = 3$  نفاضل المعادلة بالنسبة إلى  $x$  فنحصل على

$$2yy' + xy' + y + 2x = 0$$

$$y' = -\frac{2x + y}{2y + x}$$

إذن

(٧) التفاضل الباراميتري (تفاضل الدوال الباراميتريّة):

### Parametric Differentiation

أحيانا تعطى الدالة  $y = f(x)$  بالصورة  $x = \phi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  أى

أن  $x, y$  دالتان فى متغير ثالث  $t$ . هذه الصورة تسمى صورة باراميتريّة (أو الدوال الوسيطة) ونسمى المتغير  $t$  بالباراميتري parametr (أو الوسيط). ولإيجاد  $y'$  نستخدم القاعدة:

$$y' = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{d\psi/dt}{d\phi/dt} = h(t)$$

نلاحظ أن المشتقة الأولى دالة تعتمد على الباراميتري  $t$ .

لحساب المشتقة الثانية  $y'' = \frac{d}{dx} y'$  نطبق قاعدة السلسلة

$$y'' = \frac{d}{dx} y' = \frac{dy'}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy'/dt}{dx/dt}$$

أى أننا نفاضل المشتقة الأولى بالنسبة إلى  $t$  ونقسم الناتج على

مشتقة  $x$  بالنسبة إلى  $t$ . وتُطبق نفس الفكرة لإيجاد المشتقات الأعلى.

مثال (٢) ليكن  $x = t^3$ ,  $y = t^2 + 1$  فإن  $\frac{dx}{dt} = 3t^2$ ,  $\frac{dy}{dt} = 2t$  وتكون

المشتقة الأولى  $y' = \frac{2t}{3t^2} = \frac{2}{3t}$ ، والمشتقة الثانية هي

$$y'' = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{-2/(3t^2)}{3t^2} = -\frac{2}{9t^4}$$

مثال (٣) أوجد تفاضل الدالة  $x^3$  بالنسبة إلى الدالة  $\sqrt{x^4 - 3x^2}$ .

الحل بوضع  $\psi(x) = x^3$ ،  $\phi(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2}$  نجد أن  $\frac{d\phi}{dx} = \frac{4x^3 - 6x}{2\sqrt{x^4 - 3x^2}}$

و  $\frac{d\psi}{dx} = 3x^2$  ونحصل على

$$\frac{d\psi}{d\phi} = \frac{d\psi/dx}{d\phi/dx} = \frac{3x^2}{4x^3 - 6x} \cdot 2\sqrt{x^4 - 3x^2} = \frac{3x^2\sqrt{x^4 - 3x^2}}{2x^2 - 3}$$

وسنتعرض للعديد من الأمثلة والتمارين على القواعد السابقة بعد

دراسة اشتقاق الدوال الأولية.

## تمارين

(١) أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية:

$$(i) y = x^3(x-2)(x^5-4) \quad (ii) y = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2}$$

(٢) إذا كانت  $f(x) = \frac{x+c}{x-c}$  وكان  $f'(2) = -2$  فأوجد قيمة  $c$

(٣) إذا كانت  $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2}$  أوجد قيم  $x$  الحقيقية التي تجعل

$$f'(x) = 0$$

(٤) إذا كانت  $y = z^7 + 5$  ،  $z = 3x^2 - 7$  فأوجد  $y'$

(٥) إذا كانت  $y^2 = x^2(2-x)$  أثبت أن  $yy'' + (y')^2 + 3x = 2$

(٦) إذا كان  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  حيث  $a, b$  ثوابت فأوجد  $y'$

(٧) أوجد  $y'$  إذا كانت  $y^2 + 5xy - 3x^2 + 7x - 2y + 13 = 0$

(٨) فاضل  $(2x^2 + x^{-2})^7$  بالنسبة إلى  $\sqrt{x^4 - 3x^2}$

## Differentiation of elementary functions

باستخدام المبادئ الأولية (التعريف) يمكن دراسة مشتقات الدوال الأولية. وبناء على ذلك نطبق قواعد الاشتقاق عند إيجاد مشتقات الدوال.

### أولاً: الدالة الثابتة (Constant function)

إذا كان  $y = f(x) = c$  فإن  $y' = 0$ . وهذا واضح لأن

$$f(x+h) - f(x) = c - c = 0$$

### ثانياً: دالة القوى (Power function)

تفاضل دالة القوى والتي بالصورة  $f(x) = x^n$ . نلاحظ أن نطاق الدالة يعتمد على  $n$ . لدراسة قابلية الاشتقاق لهذه الدالة

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{(x+h) - x} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{t^n - x^n}{t - x} = nx^{n-1}$$

أى أن الدالة قابلة للاشتقاق عند جميع قيم  $x$  لقيم  $n \geq 1$ . وعندما  $n < 1$

الدالة غير قابلة للاشتقاق عند  $x = 0$  ويكون  $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$

وبصورة عامة

$$\boxed{\frac{d}{dx} [f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)}$$

حالة خاصة: مشتقة الجذر ذو الدرجة الثانية

$$\frac{d}{dx} \sqrt{f(x)} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}, \quad f(x) > 0$$

ثالثا : مشتقات الدوال المثلثية

## Derivatives of Trigonometric functions

إيجاد مشتقة الدالة  $y = \sin x$

إذا كانت  $y = \sin x$  . باستخدام المبادئ الأولية نجد أن

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

نحصل باستخدام العلاقة المثلثية  $\sin \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$

على

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{2x+h}{2} \cdot \sin \frac{h}{2}}{h}$$

$$= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \cos \frac{2x+h}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h/2)}{h} = 2 \cos x \cdot \left( \frac{1}{2} \right)$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

إيجاد مشتقة الدالة  $y = \cos x$

\* بالمثل إذا كانت  $y = \cos x$  . باستخدام المبادئ الأولية نجد أن

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

نحصل باستخدام العلاقة المثلثية  $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

على

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{2x+h}{2} \cdot \sin \frac{h}{2}}{h}$$

$$= -2 \lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{2x+h}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h/2)}{h} = -2 \sin x \cdot \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

إيجاد مشتقة الدالة  $y = \tan x$

في حالة الدوال المثلثية الأخرى يمكن تطبيق قواعد التفاضل كما يلي:

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

أى أن

$$x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

حيث

وبالمثل يمكن إستنتاج مشتقات باقى الدوال (متروك للطالب كتمرين).

والجدول التالى يحتوى على مشتقات الدوال المثلثية :

| $f(x)$   | $\frac{d}{dx}(f(x))$ | $f(x)$   | $\frac{d}{dx} f(x)$ |
|----------|----------------------|----------|---------------------|
| $\sin x$ | $\cos x$             | $\sec x$ | $\sec x \tan x$     |
| $\cos x$ | $-\sin x$            | $\csc x$ | $-\csc x \cot x$    |
| $\tan x$ | $\sec^2 x$           | $\cot x$ | $-\csc^2 x$         |

ملاحظة هامة: إذا كانت  $u = u(x)$  أى أن  $u$  دالة فى  $x$  فإن:-

| $f(x)$   | $\frac{d}{dx}(f(x))$ | $f(x)$   | $\frac{d}{dx} f(x)$                  |
|----------|----------------------|----------|--------------------------------------|
| $\sin u$ | $\cos u \cdot u'$    | $\sec u$ | $\sec u \cdot \tan u \cdot u'$       |
| $\cos u$ | $-\sin u \cdot u'$   | $\csc u$ | $-\csc u \cdot \cot u \cdot u'$      |
| $\tan u$ | $\sec^2 u \cdot u'$  | $\cot u$ | $-\operatorname{cosec}^2 u \cdot u'$ |

مثال (١)

(أ) إذا كانت  $y = \sin(x^3 + 2x)$  فإن  $y' = \cos(x^3 + 2x)(3x^2 + 2)$

(ب) إذا كانت  $y = \sec(\sin(x^3 + 2x))$  فإن

$$y' = [\sec(\sin(x^3 + 2x)) \cdot \tan(\sin(x^3 + 2x))] \cos(x^3 + 2x) (3x^2 + 2)$$

(ج) إذا كانت  $y = \tan(\tan x^4)$  فإن

$$y' = \sec^2(\tan x^4) [\sec^2 x^4 \cdot 4x^3] = 4x^3 \sec^2 x^4 \sec^2(\tan x^4)$$

رابعاً : مشتقات الدوال المثلثية العكسية :

### Derivatives of inverse trigonometric functions:

في البداية نعرف الدالة العكسية للدالة  $f(x)$  بأنها دالة  $g(x)$  بحيث أن

$$f(g(x)) = g(f(x)) = x \text{ ويرمز للدالة العكسية للدالة } f(x) \text{ بالرمز } f^{-1}(x)$$

فيكون  $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$  بمعنى أن كلا من الدالتين تلغى تأثير

الأخرى فمثلاً الدالتان

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x^2$$

$$f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{x^2} = x,$$

$$g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$

$$f(g(x)) = g(f(x)) = x$$

إذن

ويتكون الدالتان  $f(x) = \sqrt{x}$  ،  $f^{-1}(x) = x^2$  متعاكستين (كل منهما معكوس

للأخرى)

ويكون للدالة  $f(x)$  معكوس (دالة عكسية)  $f^{-1}(x)$  إذا كانت الدالة  $f(x)$

دالة تناظر أحادى 1-1 correspondence أى أنها أحادية (1-1 function)

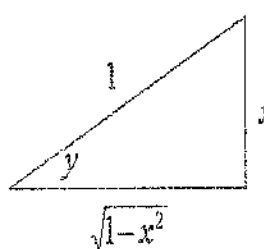
وفوقية Onto.

بإستخدام خصائص الدوال العكسية ومشتقات الدوال المثلثية، بالإضافة

إلى العلاقات المثلثية ، يمكن إيجاد مشتقات الدوال المثلثية العكسية. سوف نستنتج

بعض منها ونترك الباقي كتدريب للطالب.

إذا كانت  $y = \sin^{-1} x$  فإن هذا يعنى أن  $x = \sin y$  وبإجراء التفاضل لطرفى المعادلة بالنسبة إلى  $x$  يكون  $1 = \cos y \cdot y'$  ومنها نجد أن

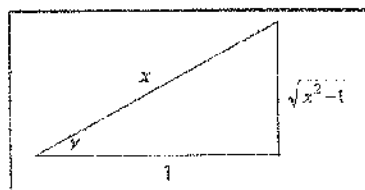


$$y' = \frac{1}{\cos y} \quad \text{ومن المثلث نجد أن} \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{أى أن}$$

وبالمثل إذا كانت  $y = \sec^{-1} x$  فإن  $x = \sec y$  وبإجراء التفاضل لطرفى المعادلة بالنسبة إلى  $x$  يكون  $1 = \sec y \tan y \cdot y'$  ومنها نجد أن

$$y' = \frac{1}{\sec y \tan y}$$



وباستخدام العلاقات المثلثية نجد أن

$$y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

ويمكن إستنتاج باقى قواعد الإشتقاق للدوال المثلثية العكسية لنحصل على

النتائج التالية:

| $f(x)$        | $\frac{d}{dx}(f(x))$      | $f(x)$                        | $\frac{d}{dx} f(x)$        |
|---------------|---------------------------|-------------------------------|----------------------------|
| $\sin^{-1} x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  | $\sec^{-1} x$                 | $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$  |
| $\cos^{-1} x$ | $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\operatorname{cosec}^{-1} x$ | $\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$ |
| $\tan^{-1} x$ | $\frac{1}{1+x^2}$         | $\cot^{-1} x$                 | $\frac{-1}{1+x^2}$         |

وبالمثل يمكننا كتابة التعميم التالي:-

| $f(x)$           | $\frac{d}{dx}(f(x))$       | $f(x)$                           | $\frac{d}{dx} f(x)$         |
|------------------|----------------------------|----------------------------------|-----------------------------|
| $\sin^{-1} u(x)$ | $\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$  | $\sec^{-1} u(x)$                 | $\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$  |
| $\cos^{-1} u(x)$ | $\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$ | $\operatorname{cosec}^{-1} u(x)$ | $\frac{-u'}{u\sqrt{u^2-1}}$ |
| $\tan^{-1} u(x)$ | $\frac{u'}{1+u^2}$         | $\cot^{-1} u(x)$                 | $\frac{-u'}{1+u^2}$         |

ملاحظة: نلاحظ من الجدول أعلاه أن

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x + \cos^{-1} x) = 0,$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x + \cot^{-1} x) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x + \csc^{-1} x) = 0$$

مثال (٢) أوجد  $y'$  لكل من الدوال الآتية:

$$a) y = \tan^{-1}(\sin x^2)$$

$$b) y = \sin^{-1}(\tan x)$$

$$c) y = \sec^{-1}(x \sin x)$$

$$d) y = \tan x \tan^{-1} \sqrt{x}$$

$$e) y = \cos^{-1}(x^2 \cos x)$$

$$f) y = \cos(\tan^{-1} \sqrt{x} \cdot \cos^{-1} \sqrt{x})$$

الحل: بتطبيق قواعد الاشتقاق بالجدول السابق نجد أن:

$$a) y' = \frac{2x \cos x^2}{1 + \sin^2 x^2}$$

$$b) y' = \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1 - \tan^2 x}}$$

$$c) y' = \frac{\sin x + x \cos x}{x \sin x \sqrt{(x \sin x)^2 - 1}}$$

$$d) y' = \tan x \cdot \frac{1/(2\sqrt{x})}{1+x} + \sec^2 x \tan^{-1} \sqrt{x}$$

$$= \frac{\tan x}{2\sqrt{x}(1+x)} + \sec^2 x \tan^{-1} \sqrt{x}$$

$$e) y' = -\frac{2x \cos x - x^2 \sin x}{\sqrt{1-x^4} \cos^2 x}$$

$$f) y' = -\sin(\tan^{-1} \sqrt{x} \cdot \cos^{-1} \sqrt{x}) \left[ \tan^{-1} \sqrt{x} \frac{-1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \right. \\ \left. + \cos^{-1} \sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} \right] \\ = \frac{\sin(\tan^{-1} \sqrt{x} \cdot \cos^{-1} \sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \left[ \frac{\tan^{-1} \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} - \frac{\cos^{-1} \sqrt{x}}{1+x} \right]$$

## تمارين

(١) أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية:

$$(a) y = (\sin^{-1} \sqrt{x})^3$$

$$(b) y = \frac{\sin^{-1} x}{x}$$

$$(c) y = x \tan^{-1} x^2$$

$$(d) y = x^3 \operatorname{cosec}^{-1} x^3$$

$$(e) y = x \sin x + \cos x$$

$$(f) y = \sin^3 x^2$$

$$(g) y = \sqrt{\sin 2x}$$

$$(h) y = \sec(\tan x)$$

$$(i) y = \sec(\sec x)$$

$$(j) y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$(k) y = \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}$$

$$(l) y = \cos^3(2x^3 + 4)$$

$$(m) y = \sqrt{1 + \sec x}$$

(٢) فاضل  $\tan^{-1} \sqrt{x}$  بالنسبة إلى  $\sqrt{x}$

(٣) أوجد المشتقة الأولى  $\frac{dy}{dx}$  إذا كان  $5y^2 + \sin y = x^2$

(٤) حقق عمليات التفاضل الآتية:

$$y = \sqrt{1 + \sin x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin x}$$

$$y = \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x \Rightarrow y' = \sec^4 x$$

$$y = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow y' = (1 + \cos x)^{-1}$$

خامسا: مشتقات الدوال اللوغاريتمية:

## Derivatives of Logarithmic functions:

مشتقة اللوغاريتم الطبيعي (Natural logarithm)

مشتقة اللوغاريتم الطبيعي  $y = \ln x$

نظرية: إذا كانت  $y = \ln x$  فإن  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

وعموما فإن  $\frac{d}{dx}[\ln u(x)] = \frac{u'(x)}{u(x)}$

مثال (٣)

(أ) إذا كانت  $y = \ln(x^5 + 3x^2 + 6)$  فإن  $y' = \frac{5x^4 + 6x}{x^5 + 3x^2 + 6}$

(ب) إذا كانت  $y = \ln(3x^4)$  فإن  $y' = \frac{12x^3}{3x^4} = \frac{4}{x}$

مشتقة اللوغاريتم لأساس ثابت:

## Derivative of logarithm with constant base:

لإيجاد مشتقة الدالة اللوغاريتمية لأساس ثابت أو متغير، نستخدم

خواص اللوغاريتمات للحصول على دالة أسية، ثم نأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين (حيث أن مشتقة اللوغاريتم الطبيعي معلومة)، وذلك كما يلي:

أ- مشتقة اللوغاريتم ذو الأساس الثابت  $y = \log_a f(x)$ . الصورة الأسية للدالة  $y = \log_a f(x)$  هي  $f(x) = a^y$ ، وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين نحصل على  $\ln f(x) = y \ln a$ . بإجراء التفاضل للطرفين بالنسبة لـ  $x$  يكون

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = y' \ln a \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{f'(x)}{(\ln a) f(x)}$$

وهذا يعنى أن

$$\frac{d}{dx} [\log_a f(x)] = \frac{f'(x)}{(\ln a) f(x)}$$

مثال (٤)

إذا كانت  $y = \log_4 (x^3 + 5x)$  فإن  $y' = \frac{1}{\ln 4} \frac{(3x^2 + 5)}{(x^3 + 5x)}$

مثال (٥) إذا كانت  $f(x) = \ln\left(\frac{x^4}{x-1}\right)$  فأوجد  $f'(x)$

الحل :  $f(x) = \ln x^4 - \ln(x-1) = 4 \ln x - \ln(x-1)$

$$\therefore f'(x) = \frac{4}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{3x-4}{x(x-1)}$$

مثال (٦)

(i)  $\frac{d}{dx} [\ln(\ln x)]$  أوجد : (ii)  $\frac{d}{dx} \left[ \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} \right]$

الحل :

(i)  $\frac{d}{dx} [\ln(\ln x)] = \frac{1}{x \ln x}$

(ii)  $\frac{d}{dx} \left[ \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} \right] = \frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{2} [\ln(1+\sin x) - \ln(1-\sin x)]$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{2 \cos x}{1-\sin^2 x} \right] = \frac{1}{\cos x} = \sec x = \frac{1}{2} \left[ \frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{\cos x}{1-\sin x} \right]$$

سادسا: مشتقات الدوال الأسية:

### Derivatives of exponential functions

إيجاد مشتقة الدالة الأسية  $y = e^{f(x)}$

$$y = e^{f(x)} \Rightarrow \ln y = f(x) \quad \frac{y'}{y} = f'(x) \Rightarrow y' = y f'(x)$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} e^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot f'(x)}$$

مثال (٧) إذا كانت  $y = e^{x^3+5x}$  فإن  $y' = e^{x^3+5x} [3x^2+5]$

إيجاد مشتقة الدالة الأسية لأساس ثابت  $a$  أو متغير  $g(x)$

تكون هذه الدوال على الصورة

$$(i) y = a^{f(x)} \quad (ii) y = f(x)^{g(x)}$$

ولإيجاد المشتقة في كلا الحالتين نأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين

$$(i) \ln y = f(x) \ln a \quad (ii) \ln y = g(x) \ln f(x)$$

بتفاضل الطرفين بالنسبة إلى  $x$  نحصل على

$$(i) \frac{y'}{y} = \ln a \cdot f'(x) \Rightarrow y' = y \ln a \cdot f'(x)$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} (a^{f(x)}) = a^{f(x)} \ln a \cdot f'(x)}$$

$$(ii) \frac{y'}{y} = g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{1}{f(x)} f'(x)$$

$$\Rightarrow y' = y \left( g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right)$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} (f(x)^{g(x)}) = f(x)^{g(x)} \left( g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right)}$$

مثال (٨) إذا كانت  $y = 3^{3x+2}$  فإن

$$y' = 3^{3x+2} \cdot 3 \ln 3 = 3^{3x+2} \ln 27$$

مثال (٩) أوجد المشتقة الأولى للدالة  $y = (x^3 + 2x)^{2x-3}$

الحل بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين يكون

$$\ln y = (2x-3) \ln(x^3 + 2x)$$

بتفاضل الطرفين بالنسبة إلى  $x$  نحصل على

$$\frac{y'}{y} = (2x-3) \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x} + 2 \ln(x^3 + 2x)$$

$$y' = (x^3 + 2x)^{2x-3} \left( (2x-3) \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x} + \ln(x^3 + 2x)^2 \right)$$

## تمارين

أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية:

(1)  $y = 2^{5x} \cdot 3^{3x^2}$

(2)  $y = x^{\sqrt{x}}$

(3)  $y = (x^3 + 3) \cdot 2^{-7x}$

(4)  $y = x^4 \cdot 4^x$

(5)  $y = (\tan x)^{\sin x}$

(6)  $y = \left(\frac{3}{x}\right)^x$

(7)  $\ln y = \tan x$

## المشتقة ذات الرتبة $n$ The $n^{\text{th}}$ derivative

كما سبق أن ذكرنا فإن المشتقة الثانية  $y''$  للدالة  $y = f(x)$  نحصل عليها بمفاضلة  $y'$  مرة واحدة بالنسبة إلى  $x$  وكذلك نحصل على  $y'''$  بمفاضلة  $y''$  بالنسبة إلى  $x$  وهكذا. ونرمز للمشتقة ذات الرتبة  $n$  بالرمز  $y^{(n)}$  ( أحيانا يرمز للمشتقات بالرمز  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$  ). وبصفة عامة فإن المشتقة ذات الرتبة  $n$  هي نتيجة مفاضلة الدالة  $y = f(x)$  عدد  $n$  من المرات المتتالية. وسنعين الآن المشتقة ذات الرتبة  $n$  لبعض الدوال القياسية التي كثيراً ما نقابلها في التطبيقات العملية.

١- المشتقة ذات الرتبة  $n$  للدالة الأسية: إذا كانت  $y = e^{kx}$

حيث  $k$  عدد حقيقي ، فإن

$$y' = k e^{kx}, \quad y'' = k^2 e^{kx}, \quad y''' = k^3 e^{kx}, \quad \dots, \quad y^{(n)} = k^n e^{kx}$$

٢- المشتقة ذات الرتبة  $n$  للدالة  $y = \sin x$  هي

$$y' = \cos x = \sin(x + \pi/2),$$

$$y'' = \cos(\pi/2 + x) = \sin(x + \pi/2 + \pi/2) = \sin(x + \pi),$$

$$y''' = \cos(x + \pi) = \sin(x + 3\pi/2), \dots,$$

$$y^{(n)} = \sin(x + n\pi/2)$$

٣- المشتقة ذات الرتبة  $n$  للدالة  $y = \cos x$  هي

$$y' = -\sin x = \cos(x + \pi/2), \quad y'' = -\sin(x + \pi/2) = \cos(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}),$$

$$y^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

٤- المشتقة ذات الرتبة  $n$  للدالة  $y = \ln(ax + b)$  حيث

$a, b$  أعداد حقيقية، فإن

$$y' = \frac{a}{ax + b}, \quad y'' = \frac{-a^2}{(ax + b)^2},$$

$$y''' = \frac{2a^3}{(ax+b)^3}, \dots$$

وتكتب المشتقة ذات الرتبة  $n$  بالصورة

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} a^n (n-1)!}{(ax+b)^n}$$

### أمثلة متنوعة

مثال (١) إذا كان  $\sin(xy) - x^2 + xy^2 + \ln(x+y) = 2y$  فأوجد  $y'$

حيث  $y$  دالة في  $x$

الحل بالتفاضل بالنسبة إلى  $x$  نجد أن

$$\cos(xy)[xy' + y] - 2x + [2xyy' + y^2] + \frac{1+y'}{x+y} = 2y'$$

$$y' \left\{ x \cos(xy) + 2xy + \frac{1}{x+y} - 2 \right\} = -y \cos(xy) + 2x - y^2 - \frac{1}{x+y}$$

ومنها نحصل على  $y'$

$$y' = \frac{-y \cos(xy) + 2x - y^2 - \frac{1}{x+y}}{x \cos(xy) + 2xy + \frac{1}{x+y} - 2}$$

مثال (٢) إذا كان  $e^{2x-y} - x^2 y^2 + \tan(x+y) = 0$  فأوجد  $y'$  حيث  $y$

دالة في  $x$

الحل بإجراء التفاضل بالنسبة إلى  $x$  نجد أن

$$e^{2x-y}(2-y') - (2x^2 yy' + 2xy^2) + \sec^2(x+y)(1+y') = 0$$

$$y' \{ \sec^2(x+y) - e^{2x-y} - 2x^2 y \} = 2xy^2 - 2e^{2x-y} - \sec^2(x+y)$$

$$y' = \frac{2xy^2 - 2e^{2x-y} - \sec^2(x+y)}{\sec^2(x+y) - e^{2x-y} - 2x^2 y} \quad \text{ويكون}$$

مثال (٣) إذا كان  $x = e^{\sqrt{t}}$  ،  $y = \ln(\sec^{-1} \sqrt{x} + \ln x)$  ، فأوجد  $\frac{dy}{dt}$

الحل باستخدام قاعدة السلسلة  $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2x\sqrt{x-1}} + \frac{1}{x}}{\sec^{-1} \sqrt{x} + \ln x}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{\sqrt{t}}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\frac{1}{2x\sqrt{x-1}} + \frac{1}{x}}{\sec^{-1} \sqrt{x} + \ln x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{\sqrt{t}}$$

إذن

بالتعويض عن  $x = e^{\sqrt{t}}$  نجد أن

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{4\sqrt{e^{\sqrt{t}}-1}} \cdot \frac{-1+2\sqrt{e^{\sqrt{t}}-1}}{\sqrt{t} \sec^{-1}(e^{\frac{1}{2}\sqrt{t}}) + t}$$

مثال (٤) أوجد مشتقة الدالة  $\phi(x) = x^2 - \ln(\ln x)$  بالنسبة إلى الدالة

$$\psi(x) = e^{\cos x} + \sin^{-1} x$$

الحل باستخدام قاعدة اشتقاق الدالة البارامترية:  $\frac{d\phi}{d\psi} = \frac{\phi'}{\psi'}$

$$\phi'(x) = 2x - \frac{1}{x \ln x}, \quad \psi'(x) = -\sin x e^{\cos x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d\phi}{d\psi} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x \ln x} \cdot \frac{2x^2 \ln x - 1}{-\sin x \sqrt{1-x^2} e^{\cos x} + 1}$$

## تمارين عامة على المشتقات

(١) أوجد مشتقات الدوال الآتية بالنسبة لـ  $x$  :

$$1) y = \sec(\tan x)$$

$$2) y = e^{\sqrt{x+1}} \ln(\tan x)$$

$$3) y = e^{\sin^{-1} x^2}$$

$$4) y = \log_2 \sin^{-1} x^2$$

$$5) y = \cos^{-1}(\cot x)$$

$$6) y = \cos^{-1} \left( \frac{a + b \cos x}{b + a \cos x} \right)$$

$$7) y = e \ln(\sin^{-1} x^2)$$

$$8) y = x^{\sin x}$$

(٢) فاضل بالنسبة إلى  $x^3$  الدوال الآتية :

$$1) \sin x^3$$

$$2) \sin^{-1} \sqrt{x}$$

(٣) باستخدام التفاضل اللوغاريتمي أوجد مشتقات الدوال التالية:

$$1) y = x^{\ln x}$$

$$2) y = (\sin x)^{\cos x}$$

$$3) y = (\tan^{-1} x)^{x^2}$$

$$4) y = \sqrt{\frac{(x+5)(x-1)}{x+2}}$$

(٤) أوجد  $\frac{dy}{dx}$  للدوال الآتية حيث  $y$  دالة في  $x$  :

$$1) 1 + xy = e^{xy}$$

$$2) \ln(x+y) + x^2 + 3y^3 = 1$$

$$3) x \tan^{-1} y = y \tan^{-1} x$$

(٥) أوجد  $\frac{dy}{dt}$  للدوال الآتية :

$$1) x = at^2, \quad y = \sin 3x$$

$$2) x = t + \frac{1}{t}, \quad y = \sin^{-1} x^2$$

$$3) x = \sin t - t \cos t, \quad y = e^{\tan^2 x}$$

$$x^4 y_2 + y = 0$$

(٦) إذا كانت  $y = x \sin \frac{1}{x}$  أثبت أن :

(٧) إذا كانت  $y = \tan(m \tan^{-1} x)$  أثبت أن :  $(1+x^2)y_2 = 2(my-x)y_1$

## الباب الثالث

### تطبيقات التفاضل Applications of derivatives

سوف نقدم فى هذا الباب بعض تطبيقات التفاضل، حساب النهايات (قاعدة لوبيتال)، بالإضافة إلى مفكوك الدوال باستخدام مفكوك تيلور وماكلورين.

#### أولاً: قاعدة لوبيتال L'Hospital's rule

عند إيجاد نهاية دالة كسرية  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  وكان ناتج التعويض يعطى أى من الكميتين  $\frac{0}{0}$  أو  $\frac{\infty}{\infty}$  فإننا نقول أن النهاية فى حالة عدم تحديد Indeterminate form. وفى هذه الحالة يجب تحديد ما إذا كانت النهاية موجودة أم لا. وللتعامل مع هذا النوع من النهايات يفضل استعمال قاعدة لوبيتال.

وتنص قاعدة لوبيتال على: إذا كانت كل من الدالتين  $f(x)$ ,  $g(x)$  قابلتين للتفاضل فى فترة ما تحتوى النقطة  $a$ . وكانت النهاية فى حالة عدم تحديد فإن:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مى تواجدت النهاية الأخيرة. وإذا كانت النهاية بالطرف الأيمن غير موجودة فإن النهاية بالطرف الأيسر تكون كذلك غير موجودة. مع ملاحظة أن النهاية بالطرف الأيمن تعالج كنهاية مستقلة ويمكن أن نطبق قاعدة لوبيتال أكثر من مرة فى نفس المسألة.

مثال (١) عين النهاية  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln(\cos 2x)}{(\pi - x)^2}$

الحل نجد أن ناتج التعويض يعطى حالة عدم تحديد  $\frac{0}{0}$  . بتطبيق قاعدة

لوبيتال نحصل على

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\log(\cos 2x)}{(\pi - x)^2} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan 2x}{\pi - x}$$

نلاحظ أن الطرف الأيمن يعطى الصورة  $\frac{0}{0}$  ، وبتطبيق قاعدة لوبيتال

مرة أخرى

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\log(\cos 2x)}{(\pi - x)^2} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \sec^2 2x}{-1} = -2$$

مثال (٢) أوجد النهاية  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^{2x}}$

الحل عندما  $x \rightarrow \infty$  نحصل على الصورة  $\frac{\infty}{\infty}$  . وبتطبيق

قاعدة لوبيتال نجد أن

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{2e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{4e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{8e^{2x}} = \frac{6}{\infty} = 0$$

نلاحظ أن قاعدة لوبيتال تم تطبيقها ثلاث مرات

مثال (٣) أوجد النهاية  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^x - 8}{x - 3}$

الحل بالتعويض المباشر نجد أن  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^x - 8}{x - 3} = \frac{0}{0}$  وبتطبيق قاعدة

لوبيتال نجد أن

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^x - 8}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^x \ln 2}{1} = 8 \ln 2$$

الصور غير المحددة ( $0 \cdot \infty$  و  $\infty - \infty$ )

إذا كانت الدالة على صورة حاصل جمع أو طرح دالتين

$f(x) = g(x) \pm h(x)$  وعند حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  حصلنا على

الصورة غير المحددة  $\infty - \infty$  وكذلك إذا كان  $f(x) = g(x) \cdot h(x)$

وعند حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  حصلنا على الصورة غير المحددة

$0 \cdot \infty$ . هنا لا نستطيع تطبيق قاعدة لوبيتال مباشرة ولكن نقوم بإعادة

ترتيب الدالة مرة أخرى للحصول على دالة كسرية وذلك كما يلي:

- في حالة الدالة  $f(x) = g(x) \pm h(x)$  نقوم بتوحيد المقامات. أما في

حالة ما كانت الدالتان  $g(x), h(x)$  (أو أى منهما) دالة كسرية، فنضرب

البسط والمقام فى المرافق (مرافق  $g(x) \pm h(x)$  هو  $g(x) \mp h(x)$ ).

- فى حالة الدالة  $f(x) = g(x) \cdot h(x)$  نكتب الدالة  $f(x)$  بالصورة

$f(x) = g(x) / (1/h(x))$  أو  $f(x) = h(x) / (1/g(x))$  ونصح بترك الدالة

اللوغاريتمية بالبسط.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$$

مثال (٤) أوجد النهاية

الحل عندما  $x \rightarrow 0$  نحصل على  $\infty - \infty$ . ولهذا نقوم بإعادة كتابة الدالة كما يلي:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \frac{0}{0}$$

وبتطبيق قاعدة لوبيتال نجد أن

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x \cos x + \sin x} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cot x$$

مثال (٥) إحسب النهاية

الحل عندما  $x \rightarrow 0$  نحصل على الصورة غير المحددة  $0 \cdot \infty$ . ولهذا نقوم بإعادة كتابة الدالة

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cot x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\tan x} = \frac{0}{0}$$

في صورة كسرية

وبتطبيق قاعدة لوبيتال نجد أن

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cot x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sec^2 x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \tan(1/x)$$

مثال (٦) إحسب النهاية

الحل عندما  $x \rightarrow \infty$  نحصل على الصورة غير المحددة  $0 \cdot \infty$ . ولهذا نقوم بإعادة كتابة الدالة في صورة كسرية

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \tan \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\tan(1/x)}{(1/x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sec^2(1/x) = 1$$

## تمارين

باستخدام قاعدة لوبيتال إ حسب النهايات الآتية:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\ln \tan x}{e^{\sec^2 x}}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right\}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\ln x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\tan x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x \sec x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^3}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan \pi x}{x-1}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\ln x}$$

ثانياً: مفكوك تيلور وماكلورين للدوال:

Taylor's and Maclaurin's expansions of functions:

للتغلب على الصعوبات المرتبطة بإجراء بعض العمليات الرياضية على بعض الدوال كعملية إجراء التكامل والتفاضل وحساب النهايات يمكن التعبير عن الدالة في صورة كثيرة حدود والتي يكون التعامل معها رياضياً ممكناً وسهلاً. ومن النظريات الهامة في علم الرياضيات والتي تعالج هذه الأمور - والتي لها مكانة عند المهتمين بعلم الرياضيات - وتطبيقاته هما نظريتي تيلور وماكلورين.

نظرية تيلور: إذا كانت الدالة  $f(x)$  متصلة وكذلك مشتقاتها  $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$  لجميع قيم  $x$  خلال فترة تحتوى النقطة  $x=a$ . فإن

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_{n+1}(x)$$

ويمكن كتابة التعبير السابق في الصورة الأبسط الآتية:

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + R_{n+1}(x) \quad (1)$$

ويسمى  $R_{n+1}(x)$  بالباقي Reminder ويعطى الخطأ في تقريب الدالة بكثيرة الحدود

في قوى  $(x-a)$  التصاعدية من الدرجة  $n$  ولقد أستنتج لاجرائج أبسط الصور للباقي وهى

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t), \quad a < t < x \quad (2)$$

المعادلة (1) تسمى بمفكوك تيلور للدالة  $f(x)$  حول (أو بجوار) النقطة

$x=a$

**مفكوك ماكلورين:** بوضع  $a=0$  في مفكوك تيلور نحصل على مفكوك

ماكلورين كالآتي:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots$$

$$+ \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_{n+1}(x) \quad (3)$$

حيث أن

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t), \quad 0 < t < x \quad (4)$$

ويعطى مفكوك الدالة بجوار النقطة  $x=0$

ولقد توصل تيلور بطريقة معقدة إلى مفكوك الدالة بالصورة (3). بعد

ذلك أقترح ماكلورين الطريقة البسيطة الآتية لإستنتاج هذه العلاقة. فلقد

درس ماكلورين المتساوية

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots \quad (i)$$

ولتحديد المعاملات  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$  وجد بواسطة التفاضل أن

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots \\ f''(x) &= 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \dots \\ f'''(x) &= 6a_3 + 24a_4 x + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (ii)$$

وبالتعويض عن  $x=0$  في المعادلات (i), (ii) نحصل على

$$a_0 = f(0), a_1 = f'(0), a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \dots, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \dots$$

وبنفس الطريقة يمكن إستنتاج العلاقة (1).

**ملاحظة (١)** إذا كانت  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0$  نحصل من (1) على

متسلسلة لانهائية تسمى متسلسلة تيلور المكافئة للدالة. وكذلك نحصل من (3) على ما يسمى بمتسلسلة ماكلورين المكافئة للدالة. ويكونا بالشكل الآتي على الترتيب

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) \quad (5)$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} f^{(i)}(0) \quad (6)$$

وتسمى بمتسلسلات القوى في  $(x-a)$  و  $x$  على الترتيب.

**ملاحظة (٢)**

أ. يكون مفكوك الدوال أكثر فائدة إذا كان حول النقطة التي عندها كل من الدالة ومشتقاتها معرفة.

ب. إذا كانت الدالة الكسرية لا تحقق شروط النظرية لإيجاد المفكوك ، ولكن دالة البسط أو المقام تحقق الشروط من الممكن إيجاد مفكوك كلا منهما على حدة.

مثال (١) أوجد مفكوك ماكلورين للدالة  $f(x) = \ln(1+x)$

الحل نجد مشتقات الدالة  $f(x) = \ln(1+x)$  كما يلي

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)} = (1+x)^{-1}, \quad f''(x) = -(1+x)^{-2},$$

$$f'''(x) = 2(1+x)^{-3}, \quad f^{(4)}(x) = -6(1+x)^{-4}, \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! (1+x)^{-n}$$

وبالتالى نحصل على

$$f(0) = \ln(1) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(0) = 2, \dots,$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

$$R_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) = \frac{(-1)^n x^n}{n+1} (1+\xi)^{-n} \text{ ولحساب الباقي}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1} (1+\xi)^{-n} = 0$$

إذن مفكوك ماكلورين للدالة  $f(x) = \ln(1+x)$  هو

$$f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$$

وهذه المتسلسلة متقاربة فى الفترة  $-1 < x \leq 1$ .

⌘ لاحظ أنه لا يوجد مفكوك ماكلورين للدالة

$$f(x) = \ln(x) \text{ لأنها ليست معرفة عند } x = 0.$$

مثال (٢) أوجد الخمسة حدود الأولى من مفكوك تيلور للدالة

$$f(x) = \ln(x) \text{ حول } x = 1.$$

الحل:

كما يلى  $f(x) = \ln(x)$  نوجد مشتقات الدالة نلاحظ أن

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}, \quad f^{(5)}(x) = \frac{24}{x^5}$$

$$f'(1)=1, \quad f''(1)=-1, \quad f'''(1)=2, \quad f^{(4)}(1)=-6, \quad f^{(5)}(1)=24$$

إذن الخمسة حدود الأولى من مفكوك تيلور للدالة حول  $x=1$

$$f(1) = \ln 1 = 0 \quad \text{حيث}$$

$$\ln(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} + \dots$$

مثال (٣) أوجد مفكوك ماكلورين للدالة  $f(x) = e^x$ .

الحل نوجد مشتقات الدالة

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x, \quad f'''(x) = e^x,$$

$$f^{(4)}(x) = e^x, \dots, f^{(n)}(x) = e^x$$

$$\Rightarrow f(0) = e^0 = 1, \quad f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1$$

ولحساب الباقي

$$R_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^t$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = e^t \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

بما أن

إذن متسلسلة ماكلورين للدالة  $f(x) = e^x$  هي

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

وهذه المتسلسلة متقاربة لكل قيم  $x$ .

مثال (٤) أوجد الخمسة حدود الأولى من مفكوك ماكلورين للدالة

$$f(x) = \sin x$$

الحل نلاحظ أن  $f(0) = 0$ . نوجد مشتقات الدالة كما يلي:

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x,$$

$$f^{(5)}(x) = \cos x, \quad f^{(6)}(x) = -\sin x, \quad f^{(7)}(x) = -\cos x,$$

$$f^{(8)}(x) = \sin x, \quad f^{(9)}(x) = \cos x$$

إن الخمسة حدود الأولى من مفكوك ماكلورين للدالة  $f(x) = \sin x$  هي

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$$

مثال (٥) مفكوك الدالة  $\frac{\sin x}{x}$ : نلاحظ أن الدالة  $\frac{\sin x}{x}$  غير معرفة

عند  $x=0$  وبالتالي لا نستطيع إيجاد مفكوك ماكلورين لها. وحيث أن

المقام يحتوى على كثيرة حدود (و مفكوك ماكلورين لكثيرات الحدود

يعطى نفس الدالة). وهنا نستخدم مفكوك ماكلورين للدالة  $\sin x$  ونقسم

البسط على المقام لنحصل على

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} \dots$$

**متسلسلة ماكلورين لبعض الدوال**

لقد يسرت متسلسلات ماكلورين عمل برامج لبعض الدوال

لحساب هذه الدوال ممكناً وسهلاً ويظل لها الفضل في استعمال هذه

الدوال في الحاسبات العلمية وكذلك مكتبات لغات البرمجة بالحاسوب.

مثال لهذه الدوال (يمكن بسهولة إثبات هذه العلاقات)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad \text{for all } x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad \text{for all } x$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots, \quad \text{for } -1 \leq x \leq 1$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \dots \quad \text{for } -1 \leq x \leq 1$$

## تمارين

أوجد الأربعة حدود الأولى من مفكوك ماكلورين للدوال الآتية:

(1)  $f(x) = e^{-x}$     (2)  $f(x) = \cos(x+a)$     (3)  $f(x) = e^{\cos x}$

(4)  $f(x) = e^{\tan^{-1} x}$     (5)  $f(x) = \sin^2 x$     (6)  $f(x) = e^{x^2} - x^3$



## الجزء الثاني

# التكامل INTEGRATION

- الباب الأول: التكامل غير المحدد

- الباب الثاني: طرق التكامل

- الباب الثالث: التكامل المحدد وتطبيقاته



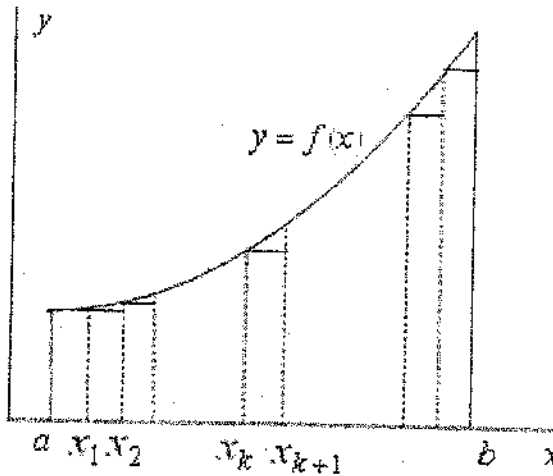
## الباب الأول

### التكامل غير المحدد Indefinite Integral

لقد ظهر حساب التكامل بسبب الحاجة إلى إيجاد طرق عامة لتعيين المساحات وأصبح له استخدامات كثيرة في العديد من العلوم ذات التطبيقات الرياضية. التحول الرئيسي في حساب المساحة كان بواسطة العالمين نيوتن وليبنز ، مستقلين عن بعضهما ، عندما اكتشفا أن المساحة يمكن الحصول عليها بعملية عكس عملية التفاضل.

لحساب مساحة المنطقة الواقعة بين منحنى الدالة المتصلة  $y = f(x)$  ومحور  $x$  في الفترة  $[a, b]$  ، حيث  $f(x)$  موجبة الإشارة. نرسم لهذه المساحة بالرمز  $A$  . إذا تم تقسيم المساحة إلى  $n$  من الشرائح بواسطة النقاط  $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$  (انظر الرسم). بفرض أن

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_k = f(x_k), \dots, y_n = f(x_n)$$



وحيث أن مساحة المستطيل الذي عرضه  $(x_{k+1} - x_k)$  وإرتفاعه  $y_k$  تساوى

$$y_k(x_{k+1} - x_k) , \text{ فإن مجموع مساحات هذه الشرائح هو}$$

$$A_n = y_0(x_1 - a) + y_1(x_2 - x_1) + \dots + y_{n-1}(b - x_{n-1}) \quad (1)$$

إذا أدخلنا الرموز التالية:

$$\Delta x_0 = x_1 - a, \Delta x_1 = x_2 - x_1, \dots, \Delta x_k = x_{k+1} - x_k, \dots, \Delta x_{n-1} = x_n - x_{n-1}$$

فإن العلاقة (1) تأخذ الصورة

$$\begin{aligned} A_n &= y_0 \Delta x_0 + y_1 \Delta x_1 + \dots + y_i \Delta x_i + \dots + y_{n-1} \Delta x_{n-1} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i \end{aligned} \quad (2)$$

عندما  $n$  تؤول إلى ما لانهاية (أي تقسيم المساحة الكلية إلى عدد كبير جداً من الشرائح) فإن عرض كل شريحة يقترب من الصفر ومجموع مساحات هذه الشرائح (والتي يصبح التعامل معها كمستطيلات أكثر دقة) يزداد اقتراباً من مساحة الشكل الواقع بين المنحنى  $y = f(x)$  ومحور  $x$  في الفترة  $[a, b]$ . وعموماً فإن المساحة  $A$  تساوى نهاية المجموع (2) عندما  $n$  تؤول إلى  $\infty$

$$\text{ونرمز لها بالرمز } \int_a^b f(x) dx$$

وتسمى التكامل المحدد للدالة  $f(x)$  من  $x=a$  إلى  $x=b$  ويسمى  $a$  الحد السفلى للتكامل ويسمى  $b$  الحد الأعلى للتكامل.

**تعريف:**

"التكامل غير المحدد للدالة المتصلة  $f(x)$  هو عملية عكسية لعملية إيجاد المشتقة الأولى للدالة". وهذه هي "النظرية الأساسية" لتعريف عملية التكامل. وتسمى عملية التكامل بـ Antiderivative or Integration، وتسمى الدالة المراد تكاملها بالمكامل Integrand والتكامل المراد حسابه  $\int f(t) dt$  يسمى Integral. ومن النظرية نجد أن مشتقة ناتج التكامل تعطى الدالة تحت التكامل. وإيجاد الدالة  $F(x)$  بحيث يكون  $F'(t) = f(t)$  ليس دائماً بالأمر السهل، ولكن يوجد طرق مختلفة لحساب التكاملات وهي محل الدراسة في هذا الكتاب.

وتُستخدم النظرية الأساسية للتكامل في تكوين جدول التكاملات الأساسية

وكذلك تُستخدم في التأكد من سلامة الحل عن طريق إثبات أن  $F'(x) = f(x)$ .

نعلم أن المشتقة الأولى لكل من الدوال المختلفة  $x^2 - 5$ ,  $x^2$ ,  $x^2 + 5$  تساوى نفس الدالة  $2x$ ، وبالتالي فإنه يمكن أن يوجد للتكامل أكثر من صورة. هنا ينشأ لدينا السؤال التالي: إذا كانت توجد أكثر من قيمة واحدة لتكامل دالة ما فما هي العلاقة التي تربط بين هذه القيم المختلفة؟ وللإجابة على هذا السؤال نفرض أن:

$$\int f(x) dx = F(x) + c, \quad \int f(x) dx = \varphi(x) + c'$$

وبتفاضل الطرفين نحصل على

$$F'(x) = f(x), \quad \varphi'(x) = f(x)$$

$$\therefore [F(x) - \varphi(x)]' = F'(x) - \varphi'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

وحيث أن الدالة الوحيدة التي مشتقتها الأولى تساوى صفر هي الثابت فإن:

$$F(x) - \varphi(x) = c_1 \Rightarrow F(x) = \varphi(x) + c_1$$

أي أن التكامل غير المحدود له أكثر من قيمة - بتفاضل أى منها يعطى الدالة تحت التكامل - ولكن الفرق بين أى اثنين منها يساوى مقدار ثابت. ولذا نضيف دائما ثابت إختياري إلى أية قيمة للتكامل ويسمى بثابت التكامل.

ونستطيع من هذا التعريف مباشرة أن نستنتج القاعدتين التاليتين:

$$(i) \int k f(x) dx = k \int f(x) dx, \quad k \text{ is a constant}$$

$$(ii) \int [f(x) \pm h(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int h(x) dx$$

## صيغ التكاملات الأساسية The Basic Integration Formulas

باستخدام النظرية الأساسية لتعريف التكامل والتي تنص على أن التكامل عملية عكسية للتفاضل نستطيع كتابة الجدول التالي للتكاملات الأساسية (القياسية) - مع إضافة ثابت التكامل لكل ناتج من نواتج التكاملات الآتية و يجب التنبيه إلى أن طرق معالجة التكاملات الي سندرسها تهدف إلى الوصول بالتكامل إلى إحدى هذه الصيغ.

$$1. \int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} \Rightarrow \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1$$

$$2. \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \ln |x|$$

$$3. \int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} \Rightarrow \int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

$$4. \int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} \Rightarrow \int a^{bx} dx = \frac{a^{bx}}{b \ln a}$$

تكاملات الدوال المثلثية:

$$5. \int \sin x dx = -\cos x$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x$$

$$7. \int \sec^2 x dx = \tan x$$

$$8. \int \csc^2 x dx = -\cot x$$

$$9. \int \sec x \tan x dx = \sec x$$

$$10. \int \csc x \cot x dx = -\csc x$$

تكاملات تعطى دوالاً مثلثية عكسية:

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} \quad \text{or} \quad = -\cos^{-1} \frac{x}{a}$$

$$12. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \quad \text{or} \quad = -\frac{1}{a} \cot^{-1} \frac{x}{a}$$

$$13. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{x}{a} \quad \text{or} \quad = -\frac{1}{a} \csc^{-1} \frac{x}{a}$$

## ملاحظة هامة:

التكاملات التي تحتوى على الدوال المثلثية العكسية وكذلك الدوال اللوغاريتمية سوف نحصل عليها باستخدام طرق التكامل والتي سوف ندرسها أيضاً فى الباب الثانى.

## استخدام صيغ التكاملات الأساسية:

إن التكاملات التى تقابلنا فى التطبيقات العملية لا تكون فى الغالب فى إحدى صور التكاملات القياسية مباشرة، مما يضطرنا إلى معالجة التكامل رياضياً لتحويل التكامل إلى إحدى الصيغ القياسية أو صورة نطبق عليها إحدى قواعد التكامل. وسندرس فى الأبواب القادمة أشهر طرق التكامل وأكثرها استخداماً.

فيما يلى نقدم بعض الأمثلة التى يمكن فيها معالجة التكامل ببساطة لكى نستطيع استخدام الصيغ الأساسية مباشرة.

$$I = \int \frac{x^5 + x - 2}{\sqrt{x}} dx \quad \text{مثال (١) أوجد التكامل}$$

الحل: من الواضح أن هذا التكامل ليس قياسياً ولكن بتوزيع البسط على المقام يتحول التكامل إلى مجموع ثلاثة تكاملات قياسية يسهل حسابها

$$I = \int (x^{9/2} + x^{1/2} - 2x^{-1/2}) dx = \frac{2}{11} x^{11/2} + \frac{2}{3} x^{3/2} - 4x^{1/2} + c$$

مثال (٢)

$$I = \int (4x - 5)^{35} dx \quad \text{أوجد التكامل}$$

الحل يمكن التعامل مع هذا التكامل باستخدام العلاقة رقم (1) كما يلى:

$$I = \int (4x - 5)^{35} dx = \frac{1}{4} \int (4x - 5)^{35} 4 dx = \frac{1}{4} \frac{(4x - 5)^{36}}{36} + c$$

$$I = \int \frac{1+\cos x}{x + \sin x} dx \quad \text{مثال (٣) احسب التكامل}$$

الحل من الواضح أن البسط يساوى مشتقة المقام

$$\int \frac{1+\cos x}{x + \sin x} dx = \ln|x + \sin x| + c$$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} dx \quad \text{مثال (٤) احسب التكامل}$$

الحل من الواضح أنه ليس من السهل التعامل مع التكامل في صورته الحالية.  
بمعالجة المكامل بضرب البسط والمقام في مرافق المقام نحصل على

$$I = \int [\sqrt{x+1} + \sqrt{x}] dx = \frac{2}{3} [(1+x)^{3/2} + x^{3/2}] + C$$

$$I = \int \frac{\ln x}{x} dx \quad \text{مثال (٥) احسب التكامل}$$

الحل في هذا التكامل نضع المكامل في صورة دالة مضروبة في تفاضلها.

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int (\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + c$$

$$I = \int \frac{dx}{e^{-x} + 1} \quad \text{مثال (٦) احسب التكامل}$$

الحل بضرب كل من البسط والمقام في  $e^x$  يكون

$$I = \int \frac{dx}{e^{-x} + 1} = \int \frac{e^x}{1 + e^x} dx = \ln(e^x + 1) + c$$

في الأمثلة التالية نعالج بعض التكاملات التي تحتوى على دوال مثلثية باستخدام المتطابقات المثلثية.

مثال (٧) لتكامل الدالة  $\tan^2 x$  نستخدم العلاقة المثلثية

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$\int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + c$$

مثال (٨)

$$i) \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c = \ln|\sec x| + c$$

$$ii) \int \sec x dx = \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$$

مثال (٩) لحساب  $I_1 = \int \cos^2 x dx$ ,  $I_2 = \int \sin^2 x dx$  نستخدم العلاقات:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c \quad \text{فيكون}$$

وبالمثل يمكن حساب  $I_2$ .

$$I = \int \frac{\sin x + \cos x}{\cos x} dx \quad \text{مثال (١٠) احسب التكامل:}$$

الحل بتوزيع البسط على المقام نجد أن

$$I = \int [\tan x + 1] dx = \ln|\sec x| + x + C$$

لحساب تكاملات على الصور

$$\int \cos ax \sin bx dx \quad \text{أو} \quad \int \sin ax \sin bx dx$$

نستخدم العلاقات المثلثية الآتية:  $\int \cos ax \cos bx dx$

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2} [\sin (a+b)x + \sin (a-b)x]$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2} [\cos (a-b)x - \cos (a+b)x]$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2} [\cos (a+b)x + \cos (a-b)x]$$

$$I_1 = \int \sin 2x \sin 3x dx, \quad I_2 = \int \sin 7x \cos 3x dx \quad \text{مثال (١١) أوجد}$$

$$\sin 2x \sin 3x = \frac{1}{2} [\cos x - \cos 5x] \quad \text{الحل باستخدام العلاقة المثلثية}$$

$$\therefore I_1 = \frac{1}{2} \int \cos x dx - \frac{1}{2} \int \cos 5x dx = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{10} \sin 5x + c$$

وبالمثل يمكن حساب  $I_2$

مثال (١٢) أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة  $(1, -2)$  وميل المماس عند

أى نقطة عليه هو  $4x^3 + 3x^2 - 2$

الحل: بما أن ميل المماس عند أى نقطة على المنحنى هو المشتقة الأولى لمعادلة

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2 \quad \text{المنحنى أى أن}$$

$$y = f(x) = \int (4x^3 + 3x^2 - 2) dx = x^4 + x^3 - 2x + c$$

وحيث أن النقطة  $(1, -2)$  تقع على المنحنى فهي تحقق معادلته، أى أن

عندما  $x=1$  يكون  $y=-2$  ومنها نجد أن  $c=-2$ . وبالتالي فإن معادلة

$$y = x^4 + x^3 - 2x - 2 \quad \text{المنحنى هى}$$

تمارين

$$1) \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}} \quad 2) \int \cot x dx \quad \text{١- أوجد التكاملات الآتية:}$$

$$3) \int \csc x dx \quad 4) \int \cot^2 x dx \quad 5) \int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2+5}}$$

٢- أوجد التكاملات الآتية:

$$1) \int \cos x \cos 3x dx \quad 2) \int \sin 5x \sin 6x dx$$

$$3) \int \frac{1}{x^2} e^{1/x} dx \quad 4) \int \frac{dx}{4x^2+9}$$

٣- أ. أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بنقطة الأصل وميل المماس له عند

$(x, y)$  هو  $x\sqrt{x}$ .

ب. أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة  $(2, 3)$  والذى ميل المماس عند

أى نقطة عليه يكون مساوياً للإحداثى السينى عند تلك النقطة.

## الباب الثانى

### طرق التكامل Methods of Integration

سوف نقدم فى هذا الباب طرق التكامل الأكثر استعمالاً.

#### أولاً: التكامل بالتعويض Integration by Substitution

التكامل بالتعويض هو إحدى طرق التكامل التى تهدف إلى تبسيط الدالة المراد تكاملها عن طريق تغير متغير التكامل. والتعويضات قد تكون عن طريق استخدام علاقات جبرية أو استخدام الدوال المثلثية أو الزائدية. وجدير بالذكر بأنه ليس أى تعويض يمكن استخدامه، إذ أن من التعويضات ما يؤدي إلى تعقيد الدالة المراد تكاملها. بالتالى فإن التعويض المناسب هو التعويض الذى يؤدي إلى وضع التكامل فى صورة نستطيع التعامل معها. وبالطبع يفهم مما سبق أنه قد توجد تعويضات مختلفة تؤدي إلى تبسيط عملية التكامل ويكون أفضلها ما جعلنا قادرين على التعامل مع التكامل الجديد بسهولة. وفى النهاية يجب وضع ناتج التكامل كدالة فى المتغير الأصلى للتكامل.

أ- التعويضات الجبرية: نستبدل المتغير بمتغير آخر من خلال علاقة جبرية. ويمكن القول بأنه إذا وجدت دالة خاصة (كالمثلثية، اللوغاريتمية، الأسية،... إلخ) تعتمد على المتغير المستقل من خلال دالة ما  $g(x)$ . نأخذ التعويض بمتغير ما وليكن  $y$  فى الصورة  $y=g(x)$  ومنها نجد علاقة  $dx$  بـ  $y, dy$ . وفى حالة الدوال الجذرية يفضل أن نأخذ التعويض الذى يخلصنا من الجذر.

مثال (١) أوجد التكامل  $I = \int e^x \tan(e^x) dx$

الحل نلاحظ أن الزاوية فى الدالة المثلثية عبارة عن دالة فى  $x$ . فى مثل هذه الحالات

نعوض عن الزاوية بمتغير ما. بوضع  $y=e^x$  ومنها  $dy=e^x dx$ .

$$\int e^x \tan e^x dx = \int \tan y dy = \ln |\sec y| + c \quad \text{إن}$$

وبالتعويض عن  $y = e^x$  نحصل على التكامل بدلالة المتغير الأصلي  $x$  كما يلي:

$$I = \ln |\sec(e^x)| + c$$

$$I = \int (x+2) \sin(x^2 + 4x - 6) dx \quad \text{تمرين (١) أوجد التكامل}$$

$$I = \int \frac{\sec \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad \text{تمرين (٢) أوجد التكامل}$$

$$\text{مثال (٢) أوجد } \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

الحل نضع  $z = e^x$ . إذن  $dz = e^x dx$  وبالتالي فإن  $dx = dz/z$  ويكون

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{1}{z + (1/z)} \frac{dz}{z} = \int \frac{dz}{z^2 + 1} = \tan^{-1} z + c = \tan^{-1}(e^x) + c$$

$$\text{مثال (٣) أوجد التكامل } \int \frac{x \sin^{-1} x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

الحل نضع  $y = x^2$  نجد أن  $dy = 2x dx$  وبالتالي فإن

$$\int \frac{x \sin^{-1} x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\sin^{-1} y}{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{1}{4} [\sin^{-1} y]^2 + c = \frac{1}{4} [\sin^{-1} x^2]^2 + c$$

يمكن أيضا حل المثال السابق بأخذ التعويض

$$y = \sin^{-1} x^2 \quad \text{نجد أن}$$

$$\int \frac{x \sin^{-1} x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{1}{2} \int y dy = \frac{1}{4} y^2 + c = \frac{1}{4} (\sin^{-1} x^2)^2 + c$$

ب- تعويضات مثلثية

عندما يحتوي التكامل على  $\sqrt{a^2 \pm x^2}$ ,  $\sqrt{x^2 - a^2}$  كجزء من

المكامل يمكن التخلص من هذا المقدار باستخدام التعويض بدوال مثلثية:

(١) إذا احتوى التكامل على المقدار  $\sqrt{a^2 - x^2}$  فإننا نستخدم أى من التعويضين:  
 $x = a \sin \theta, \quad x = a \cos \theta$

(٢) إذا احتوى التكامل على المقدار  $\sqrt{x^2 - a^2}$  فإننا نستخدم أى من التعويضين:  
 $x = a \sec \theta, \quad x = a \csc \theta$

(٣) إذا احتوى التكامل على المقدار  $\sqrt{x^2 + a^2}$  فإننا نستخدم أى من التعويضين:  
 $x = a \tan \theta, \quad x = a \cot \theta$

وباستخدام أى من هذه التعويضات يتحول التكامل إلى صورة أخرى خالية من الجذر التربيعى ويمكن اجراء التكامل بسهولة. ويجب استخدام التعويض الذى يجعل ما تحت الجذر موجبا.

وتكون التعويضات السابقة مفيدة أيضا فى حالة وجود الجذر فى المقام مرفوعا لأس فردى أو زوجى (الأس الزوجى يلغى الجذر) وكذلك فى حالة وجود الجذر فى البسط مرفوعا لأس فردى.

مثال (٤) أوجد التكامل  $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$

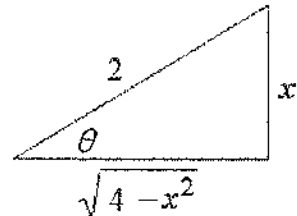
الحل بوضع  $x = 2 \sin \theta$  نجد أن  $dx = 2 \cos \theta d\theta$  ويكون

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx = \int \frac{2 \cos \theta \cdot 2 \cos \theta}{4 \sin^2 \theta} d\theta = \int \cot^2 \theta d\theta = -\cot \theta - \theta + c$$

لاحظ اننا استخدمنا المتطابقة المثلثية  $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$

وبالتالى فإن:

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \sin^{-1} \frac{x}{2} + c$$



تمرين : أوجد التكامل  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

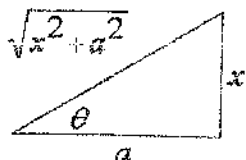
مثال (٥) أوجد التكامل  $I = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$

الحل نضع  $x = a \tan \theta$  إذن  $dx = a \sec^2 \theta d\theta$  ، ويكون

$$I = \frac{1}{a^3} \int \frac{\sec^2 \theta}{\sec^4 \theta} d\theta = \frac{1}{a^3} \int \frac{1}{\sec^2 \theta} d\theta = \frac{1}{a^3} \int \cos^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2a^3} \int (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{2a^3} (\theta + \sin 2\theta) + c = \frac{1}{2a^3} (\theta + \sin \theta \cdot \cos \theta) + c$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^3} \left( \tan^{-1} \frac{x}{a} + \frac{ax}{a^2 + x^2} \right) + c$$



## تمارين

باستخدام التعويض المناسب أوجد التكاملات التالية:

1)  $\int \frac{x dx}{\sqrt{x+3}}$     2)  $\int x \sqrt{2x+1} dx$     3)  $\int \frac{4x^3}{1+x^8} dx$     4)  $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2-1}}$

5)  $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$     6)  $\int \frac{x^2 dx}{(x+1)^4}$     7)  $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$     8)  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-4}}$

## ثانياً: التكامل باستخدام الكسور الجزئية Partial Fractions

لقد تعرضنا في الأبواب السابقة لتكامل دوال كسرية. وفي هذا الباب ندرس استخدام الكسور الجزئية لتكامل الدوال النسبية (الكسرية)، والتي على الصورة  $p(x)/q(x)$  حيث كلا من  $p(x)$ ,  $q(x)$  كثيرات حدود في المتغير  $x$ . تعتمد طريقة الكسور الجزئية على تحليل الدوال النسبية إلى مجموع عدد من الكسور التي يمكن تكاملها بسهولة، تسمى هذه الكسور بالكسور الجزئية. يسمى الكسر بالكسر الفعلي (أو الحقيقي) **Proper Fraction** إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام ويسمى بالكسر غير الفعلي **Improper Fraction** إذا كانت درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام. وطريقة الكسور الجزئية تتعامل مع تحليل الكسر الفعلي مباشرة. ولكن في حالة الكسر غير الفعلي نقوم بإجراء عملية القسمة المطولة للحصول على خارج القسمة كدالة كثيرة حدود بالإضافة إلى كسر فعلي.

هنا نستعرض الحالات الهامة والمقيدة لتحليل الدوال النسبية.  
الحالة الأولى: "إذا أمكن تحليل المقام لعوامل أولية من الدرجة الأولى وغير مكررة".

نفرض الكسر  $f(x)/g(x)$  حيث المقام كثيرة حدود من الدرجة  $n$  والتي يمكن تحليلها لـ  $n$  من العوامل الأولية المختلفة من الدرجة الأولى على الصورة  

$$g(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

حيث  $x_1, x_2, \dots, x_n$  أعداد حقيقية مختلفة. أي أن

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}$$

نكتب هذا الكسر في صورة كسور جزئية على النحو التالي:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_2)} + \dots + \frac{A_n}{(x-x_n)}$$

نوجد الثوابت  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  وذلك بتوحيد المقامات في الطرف الأيمن ومساواة البسطين (أو بضرب الطرفين في مقام الدالة الكسرية المعطاة - بعد التحليل) فنحصل على:

$$\begin{aligned} f(x) = & A_1(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n) \\ & + A_2(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n) \\ & + \dots\dots\dots \\ & + A_n(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

ويمكن الحصول على الثوابت  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  كما يلي: بوضع  $x=x_i$  في العلاقة السابقة نحصل على

$$A_i = \frac{f(x_i)}{(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}$$

حيث  $i=1,2,3,\dots,n$

$$\text{مثال (1) أوجد التكامل } I = \int \frac{5x+2}{3x^2+4x-4} dx$$

الحل نلاحظ أن الدالة تحت التكامل هي دالة كسرية والكسر فعلى وأنه يمكن تحليل المقام لعوامل من الدرجة الأولى  $3x^2+4x-4=(x+2)(3x-2)$ . نضع الكسر على الصورة

$$\frac{5x+2}{(x+2)(3x-2)} = \frac{A_1}{(x+2)} + \frac{A_2}{(3x-2)}$$

لتحديد الثوابت  $A_1, A_2$  نضرب الطرفين في  $(x+2)(3x-2)$  لنحصل على

$$5x+2 = A_1(3x-2) + A_2(x+2)$$

بوضع  $x=2/3$  نحصل على  $A_2=2$  وبوضع  $x=-2$  نحصل على  $A_1=1$ . وبالتالي يكون تحليل الكسر على الصورة:

$$\frac{5x+2}{(x+2)(3x-2)} = \frac{1}{(x+2)} + \frac{2}{(3x-2)}$$

ويصبح التكامل

$$I = \int \frac{1}{x+2} dx + \int \frac{2}{3x-2} dx = \ln|x+2| + \frac{2}{3} \ln|3x-2| + C$$

$$I = \int \frac{x^3 + 2x - 1}{x^2 - 2x - 3} dx \quad \text{مثال (٢): أوجد التكامل}$$

$$\begin{array}{r} x+2 \\ x^2-2x-3 \overline{) x^3+2x-1} \\ \underline{x^3-2x^2-3x} \phantom{-1} \\ 2x^2+5x-1 \\ \underline{2x^2-4x-6} \\ 9x+5 \end{array}$$

الحل نلاحظ أن الدالة المراد تكاملها عبارة عن كسر غير فعلى حيث أن درجة البسط أكبر من درجة المقام. لذلك يجب قسمة البسط على المقام لنحصل على

$$\frac{x^3 + 2x - 1}{x^2 - 2x - 3} = x + 2 + \frac{9x + 5}{x^2 - 2x - 3}$$

والآن نحلل مقام الكسر الفعلى الناتج من القسمة  $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$  فيصبح المقام محلل لعوامل مختلفة من الدرجة الأولى. بوضع الكسر على

$$\frac{9x+5}{(x+1)(x-3)} = \frac{A_1}{(x+1)} + \frac{A_2}{(x-3)} \quad \text{الصورة}$$

وبضرب الطرفين فى  $(x+1)(x-3)$  نحصل على

$$9x+5 = A_1(x-3) + A_2(x+1)$$

بوضع  $x = -1$  نحصل على  $A_1 = 1$  وبوضع  $x = 3$  نحصل على  $A_2 = 8$ .

ويكون تحليل الكسر على الصورة

$$\frac{x^3 + 2x - 1}{x^2 - 2x - 3} = x + 2 + \frac{1}{(x+1)} + \frac{8}{(x-3)}$$

$$I = \int (x+2) dx + \int \frac{dx}{(x+1)} + \int \frac{8}{(x-3)} dx$$

$$I = \int \frac{13x - 17}{(x-1)(x+3)(2x-1)} dx \quad \text{تمرين: أوجد التكامل}$$

الحالة الثانية: " إذا كانت عوامل المقام من الدرجة الأولى وبعضها أو كلها مكررة " .

فى هذه الحالة لدينا القاعدة الآتية : كل عامل فى المقام على الصورة  $(x-a)^r$  ، أى أن العامل  $(x-a)$  مكرر  $r$  من المرات. هذا الكسر يساوى مجموع  $r$  من الكسور الجزئية على الصورة

$$\frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x-a)^r}$$

ولتحديد الثوابت  $A_1, A_2, \dots, A_r$  نجرى نفس الخطوات السابق ذكرها فى الحالة الاولى ونستخدم التعويض بـ  $x=a$  لنحصل على الثابت  $A_1$ . ثم نقوم بمساواة معاملات قوى  $x$ ، أو نستخدم التعويض بقيمة ما لـ  $x$  للحصول على عدد من المعادلات يساوى عدد المجاهيل المتبقية.

$$I = \int \frac{x^5 + 2x^3 - 1}{x(x-1)^3} dx \quad \text{مثال (٣) أوجد التكامل}$$

الحل بما أن مقام المكامل محلل لعاملين من الدرجة الأولى أحدهما مكرر ثلاث مرات. يمكن استخدام الكسور الجزئية. ولكن الكسر غير فعلى، لذلك يجب قسمة

البسط  $x^5 + 2x^3 - 1$  على المقام  $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$  لنحصل على

$$\frac{x^5 + 2x^3 - 1}{x(x-1)^3} = x + 3 + \frac{8x^3 - 8x^2 + 3x - 1}{x(x-1)^3}$$

نضع الكسر الفعلى على الصورة:

$$\frac{8x^3 - 8x^2 + 3x - 1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)} + \frac{D}{x}$$

بضرب الطرفين في  $x(x-1)^3$  نحصل على

$$8x^3 - 8x^2 + 3x - 1 = Ax + Bx(x-1) + Cx(x-1)^2 + D(x-1)^3$$

لتعيين الثوابت: بوضع  $x=0$  نجد أن  $D=1$ . وضع  $x=1$  نجد أن  $A=2$ .

الآن نختار أى قيمتين لـ  $x$ :

$$-20 = -A + 2B - 4C - 8D \quad \text{بوضع } x=-1 \text{ نجد أن}$$

$$37 = 2A + 2B + 2C + D \quad \text{بوضع } x=2 \text{ نجد أن}$$

بالتعويض عن  $A, D$  وحل المعادلتين معاً نحصل على  $B=9, C=7$ .

وبالتالى فإن

$$\frac{x^5 + 2x^3 - 1}{x(x-1)^3} = x + 3 + \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{9}{(x-1)^2} + \frac{7}{(x-1)} + \frac{1}{x}$$

$$I = \int \left[ x + 3 + \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{9}{(x-1)^2} + \frac{7}{(x-1)} + \frac{1}{x} \right] dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{9}{(x-1)} + 7\ln|x-1| + \ln|x| + c$$

الحالة الثالثة: "المقام يحتوى على عوامل من الدرجة الثانية غير

مكررة".

العامل من الدرجة الثانية يأخذ الصورة  $ax^2 + bx + c$  ويسمى عامل أولى إذا

كان لايمكن تحليله لعاملين من الدرجة الأولى، وهذا يحدث عندما يكون المميز

$\Delta = b^2 - 4ac < 0$  أى أن جذوره تخيلية. كل عامل من الدرجة الثانية غير

مكرر يناظره كسر بسطه من الدرجة الأولى، أى على الصورة:

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

لتحديد الثوابت نقوم بتوحيد المقامات ونساوى البسط في الطرفين ثم يفضل مساواة معاملات قوى  $x$  في الطرفين لنحصل على عدد من المعادلات يساوى عدد الثوابت. وإذا وجد للمقام عوامل من الدرجة الأولى مع الدرجة الثانية نكرر ما فعلناه في الحالة الأولى لإيجاد بعض الثوابت مباشرة وذلك يؤدي إلى تبسيط المعادلات باختزال عددها.

$$I = \int \frac{2}{(x-1)(x^2+x+4)} dx \quad \text{مثال (٤) أوجد التكامل}$$

الحل بحساب المميز للمقدار التربيعي  $x^2+x+4$  نجد أن  $\Delta = 1-16 = -15 < 0$  لذلك نضع الكسر على الصورة

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+x+4)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+x+4)}$$

بضرب الطرفين في المقدار  $(x-1)(x^2+x+4)$  نحصل على

$$2 = A(x^2+x+4) + (Bx+C)(x-1)$$

بوضع  $x=1$  نحصل على  $A=1/3$  و بوضع  $x=0$  نحصل على  $C=-2/3$

و بوضع  $x=2$  (أى قيمة اختيارية) نحصل على  $B=-1/3$ . وبالتالي نحصل

على

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+x+4)} = \frac{1}{3} \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{3} \frac{x+2}{(x^2+x+4)}$$

$$I = \frac{1}{3} \int \frac{1}{(x-1)} dx - \frac{1}{3} \int \frac{x+2}{(x^2+x+4)} dx$$

ولحساب التكامل الثانى يمكن إجراء ما يلى

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x^2+x-4} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+1+3}{x^2+x-4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x-4} dx + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2+x-4} \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2+x-4| + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{(x+1/2)^2 - 17/4} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x^2+x-4| - \frac{3}{2\sqrt{17}} \ln \left| \frac{\sqrt{17}+2x+1}{\sqrt{17}-2x-1} \right|$$

$$I = \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln|x^2+x+4| - \frac{1}{2\sqrt{17}} \ln \left| \frac{\sqrt{17}+2x+1}{\sqrt{17}-2x-1} \right| + c$$

### تمارين

باستخدام الكسور الجزئية أوجد التكاملات التالية:

1)  $\int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x} dx$

2)  $\int \frac{(3x+13)dx}{x^2+4x+3}$

3)  $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx$

4)  $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+1)^2} dx$

5)  $\int \frac{5x-1}{x^2(2x-1)^2} dx$

6)  $\int \frac{dx}{x^3+1}$

7)  $\int \frac{x^4+1}{x^4-1} dx$

8)  $\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-27} dx$

9)  $\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+x+4)}$

10)  $\int \frac{5x^3-3x^2+5x-13}{(x-1)^2(x^2+2x+3)} dx$

## Integration by Parts

## ثالثاً: التكامل بالتجزئ

إذا كان  $u, v$  دالتين قابلتين للإشتقاق في  $x$  ، فإن

$$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

وبتكامل الطرفين بالنسبة لـ  $x$  نحصل على

$$uv = \int u \frac{dv}{dx} dx + \int v \frac{du}{dx} dx$$

ويكون

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (*)$$

الصيغة (\*) تسمى بقاعدة (قانون) التكامل بالتجزئ.

لحساب التكامل  $\int f(x) dx$  باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ. نقسم الدالة

$f(x)$  إلى جزئين أحدهما  $u$  والآخر مع  $dx$  يكون  $dv$  بشرط أن يكون  $dv$

نستطيع تكاملها integrable. كذلك يجب أن لا يكون التكامل  $\int v du$  أصعب

من التكامل  $\int u dv$ . فإذا كان التكامل  $\int v du$  أصعب من التكامل  $\int u dv$  فإنه

إما التقسيم الذي أخذنا به غير مناسب ونبحث عن تقسيم آخر أو أن هذه الطريقة

غير مناسبة لحساب التكامل. نقدم هنا بعض القواعد لتبسيط عملية إختيار  $u, dv$

عند تطبيق قاعدة التكامل بالتجزئ.

**القاعدة الأولى:** إذا كانت الدالة المطلوب إيجاد تكاملها عبارة عن حاصل

ضرب دالة مثلثية ( $\sin x$  or  $\cos x$ ) في دالة كثيرة حدود فإننا نأخذ

الدالة كثيرة الحدود بـ  $u$  والجزء الباقي مع  $dx$  بـ  $dv$ .

$$I = \int (x+2) \cos x dx \quad \text{مثال (١) احسب التكامل}$$

الحل نأخذ

$$u = x+2 \quad dv = \cos x dx$$

$$du = dx, \quad v = \sin x$$

بتطبيق قانون التكامل بالتجزئ

$$I = (x+2) \sin x - \int \sin x dx = (x+2) \sin x + \cos x + c$$

$$I = \int x^2 e^{3x} dx$$

مثال (٢) احسب التكامل

الحل نضع

$$u = x^2, \quad dv = e^{3x} dx$$

$$du = 2x dx, \quad v = \frac{1}{3} e^{3x}$$

بتطبيق قانون التكامل بالتجزئ

$$I = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx$$

التكامل الأخير نحسبه أيضا بالتجزئ (وهذا يوضح أن التكامل بالتجزئ يمكن

تكرار استخدامه في نفس المسألة) نأخذ

$$u = x \quad \begin{array}{l} \swarrow \\ dv = e^{3x} dx \\ \searrow \\ v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ du = dx, \end{array}$$

$$\int x e^{3x} dx = \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x}$$

إذن

$$\begin{aligned} \therefore \int x^2 e^{3x} dx &= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \left( \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} \right) + c \\ &= \left( \frac{1}{3} x^2 - \frac{2}{9} x + \frac{2}{27} \right) e^{3x} + c \end{aligned}$$

تمرين : أوجد التكامل  $I = \int x \tan^2 x dx$

مثال (٣) أوجد التكامل  $I = \int x \sec x \tan x dx$

الحل بفرض أن

$$u = x \quad \begin{array}{l} \swarrow \\ dv = \sec x \tan x dx \\ \searrow \\ v = \sec x \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ du = dx, \end{array}$$

$$I = x \sec x - \int \sec x dx = x \sec x - \ln(\sec x + \tan x) + c$$

القاعدة الثانية: إذا كانت الدالة المطلوب إيجاد تكاملها تحتوي على دالة  
لوغاريتمية أو مثلثية عكسية فإننا نأخذها (بالأس إذا وجد) بـ  $u$   
والجزء الباقى مع  $dx$  بـ  $dv$ .

مثال (٤) احسب التكامل  $I = \int \ln(x^2 + 4) dx$

الحل نأخذ

$$\begin{array}{lcl} u = \ln(x^2 + 4) & \searrow & dv = dx \\ du = \frac{2x dx}{x^2 + 4} & \swarrow & v = x \end{array}$$

و بالتالى فإن وبتطبيق قانون التكامل بالتجزئى نحصل على

$$\begin{aligned} I &= x \ln(x^2 + 4) - \int x \frac{2x}{x^2 + 4} dx \\ &= x \ln(x^2 + 4) - 2 \int \left[ 1 - \frac{4}{x^2 + 4} \right] dx \end{aligned}$$

مثال (٥) احسب التكامل  $I = \int x^2 \tan^{-1} x dx$

الحل نأخذ

$$\begin{array}{lcl} u = \tan^{-1} x & \searrow & dv = x^2 dx \\ du = \frac{dx}{x^2 + 1} & \swarrow & v = \frac{x^3}{3} \end{array}$$

ومنها

بتطبيق قانون التكامل بالتجزئى نجد أن

$$I = \frac{x^3}{3} \tan^{-1} x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx$$

وباستخدام القسمة المطولة نحصل على  $\frac{x^3}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1}$  ويكون

$$I = \frac{x^3}{3} \tan^{-1} x - \frac{1}{6} [x^2 - \ln(x^2 + 1)] + c$$

مثال (٦) أوجد التكامل  $I = \int \sin^{-1} x \, dx$

الحل نأخذ

$$\begin{array}{l} u = \sin^{-1} x \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = dx \\ v = x \end{array}$$

وبالتالى فإن

$$I = \int \sin^{-1} x \, dx = x \sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$= \int \sin^{-1} x \, dx = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + c$$

**القاعدة الثالثة:** يوجد بعض التكاملات التى إذا حسبناها بالتجزئى يظهر التكامل الأسمى بالطرف الأيمن للقاعدة مما يتيح لنا حسابه من العلاقة التى نحصل عليها (يسمى هذا النوع بالتكامل الدورى).

مثال (٧) أوجد التكامل  $I = \int e^x \cos x \, dx$

الحل نضع

$$\begin{array}{l} u = e^x \\ du = e^x \, dx \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = \cos x \, dx \\ v = \sin x \end{array}$$

$$I = \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

التكامل الأخير ليس أبسط من التكامل الأسمى ولكن هذا لا يعنى أن تقسمنا للدالة المكاملة غير مناسب. التكامل بالطرف الأيمن يحتاج إلى استخدام التكامل بالتجزئى مرة أخرى. بأخذ  $u = e^x$ ,  $dv = \sin x \, dx$  ومنها  $v = -\cos x$  و

$$du = e^x \, dx$$

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx = -e^x \cos x + I$$

$$I = e^x \sin x + e^x \cos x - I + c \Rightarrow I = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + c$$

$$I = \int \cos(\ln x) dx \quad \text{تمرين: احسب التكامل}$$

### تمارين

باستخدام التكامل بالتجزئ أوجد تكامل الدوال التالية:

$$1) \int x e^x dx$$

$$2) \int x \sin x dx$$

$$3) \int x^3 \ln x dx$$

$$4) \int x^2 \sin x dx$$

$$5) \int x (\ln x)^2 dx$$

$$6) \int x \tan^{-1} x dx$$

$$7) \int x^3 \tan^{-1} x dx$$

$$8) \int x^2 \sin x \cos x dx$$

$$9) \int x \sqrt{1+x} dx$$

## الباب الثالث

### التكامل المحدد Definite Integral

١- النظرية الأساسية في الحساب (الجزء الأول):

#### Fundamental Theory of Calculus (Part I)

لتكن  $f$  دالة متصلة على الفترة  $[a, b]$ . زاوية الدالة  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

حيث  $x \in [a, b]$  تكون متصلة على الفترة  $[a, b]$  وقابلة للتفاضل على الفترة  $(a, b)$ . كذلك يكون  $F'(x) = f(x)$ .

٢- النظرية الأساسية في الحساب (الجزء الثاني)

#### Fundamental Theory of Calculus (Part II)

لتكن  $f$  دالة متصلة على الفترة  $[a, b]$ . إذن

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

حيث  $F(x)$  هي أى مشتقة مضادة لـ  $f(x)$ ، أى تحقق الشرط  $F'(x) = f(x)$ .

الخواص الأساسية للتكامل المحدود

يمكن بسهولة إثبات الخواص التالية من التعريف مباشرة

$$1) \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$2) \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

$$3) \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

والعلاقة (3) تعنى أن التكامل المحدود لا يعتمد على متغير التكامل.

$$4) \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad a < c < b$$

وهذه تسمى بخاصية تجزئة التكامل إلى مجموع تكاملات.

(٥) إذا كانت  $y = f(x)$  دالة زوجية فإن

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0 \quad \text{وإذا كانت } y = f(x) \text{ دالة فردية فإن}$$

مثال (١)

$$(i) \int_{-\pi}^{\pi} x^{20} \sin 3x dx = 0 \quad \text{"لأن الدالة المكملة فردية"}$$

$$(ii) \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = 2 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 2 \left[ \tan^{-1} x \right]_0^1 = 2(\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0) = \frac{\pi}{2}$$

وذلك لأن الدالة المكملة زوجية.

✱ عند استخدام التكامل بالتعويض في حالة

التكامل المحدود وليكن بالعلاقة  $x = x(t)$  وعندما تتغير

$x$  من  $a$  إلى  $b$  كانت  $t$  تتغير من  $\alpha$  إلى  $\beta$

فإن

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt$$

أو يمكننا حساب التكامل بالتعويض المناسب ( بدون التقيد بحدود

التكامل ) ونعود بالنتائج إلى المتغير  $x$  ثم نستخدم حدود التكامل بالنسبة إلى

$x$

$$I = \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx \quad \text{مثال (٢) احسب التكامل}$$

$$x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt \quad \text{الحل نضع}$$

at  $x=0 \Rightarrow t=0$ , at  $x=2 \Rightarrow t=\pi/2$ .

$$I = \int_0^{\pi/2} 4 \cos^2 t \, dt = 2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) \, dt = 2 \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right)_0^{\pi/2} = \pi$$

أو: باستخدام نفس التعويض نحصل على

$$\int \sqrt{4-x^2} \, dx = \int 4 \cos^2 t \, dt = 2 \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right) = 2(t + \sin t \cos t)$$

$$= 2 \sin^{-1} \frac{x}{2} + x \sqrt{1-x^2/4}$$

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} \, dx = 2 \left( \sin^{-1} \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2/4} \right)_0^2 = \pi$$

التكامل بالتجزئي في حالة التكامل المحدود

وكذلك يمكن التعامل مع التكامل على أنه غير محدود ونستخدم

الحدود في ناتج التكامل.

$$I = \int_0^{\pi/3} x \cos x \, dx \quad \text{مثال (٣) احسب التكامل}$$

الحل نحسب هذا التكامل بالتجزئي وذلك بأن نضع

$$\begin{array}{lcl} u=x & \searrow & dv=\cos x \, dx \\ du=dx & \longleftarrow & v=\sin x \end{array}$$

$$I = x \sin x \Big|_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} \sin x \, dx = \frac{\pi}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} + [\cos x]_0^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} - \frac{1}{2}$$

## تطبيقات التكامل المحدد

توجد أهمية كبيرة للتكامل المحدد فى التطبيقات المختلفة لأنه عبارة عن عملية تجزئى ثم تجميع. وهذا يكون مفيداً للغاية عند حساب الأشياء غير المنتظمة فى تغيرها كما فى حالة الشغل لقوة متغيرة أو عند حساب أطوال منحنيات، مساحات مناطق، حجوم مجسمات، مراكز الكتل ، وعزوم القصور الذاتى ... وهكذا.

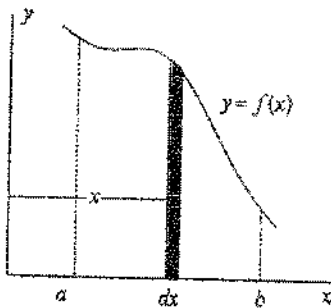
ملاحظة هامة: نستطيع التعبير عن بعض الكميات الطبيعية كما سبق ذكرها فى صورة تكامل محدود وليس بالضرورة أن يُحل التكامل تحليلياً. وعموماً التكامل المحدد نستطيع التعامل معه بطرق أخرى ( باستخدام مفكوك الدوال أو طرق التكامل العددي).

حساب مساحات المناطق المستوية Areas of plane regions

### أولاً: فى الإحداثيات الكارتيزية

قيمة التكامل المحدد لدالة متصلة  $f(x)$  فى الفترة  $[a, b]$  هى المساحة المحصورة تحت منحنى الدالة وفوق محور  $x$  والمستقيمين

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{ويعبر عنه بالصورة } x=a, \quad x=b$$

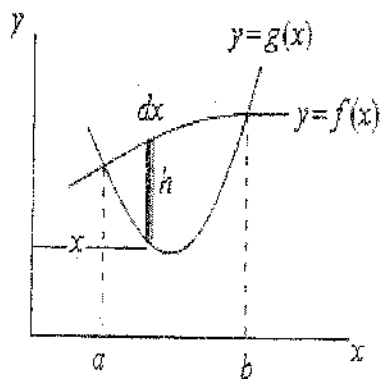


بشرط أن الدالة  $f(x)$  موجبة لجميع قيم  $x$  فى هذه الفترة. نقسم المساحة الكلية إلى شرائح رأسية على شكل مستطيلات طول كل منها  $y$  وعرضه  $dx$

فتكون مساحة الشريحة  $dA = ydx$  . وبالتالي فإن مساحة المنطقة الكلية

$$A = \int_a^b ydx = \int_a^b f(x) dx \quad \text{وحدة مربعة}$$

عموماً أى مساحة مستوية تمثل منطقة في المستوى  $xy$  محدودة بعدد من المنحنيات. بفرض أن المطلوب حساب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين  $y=f(x)$  و  $y=g(x)$  في الفترة  $[a, b]$  حيث أن  $f(x) \geq g(x)$  . تجزئ المساحة إلى شرائح رأسية عرض كل منها  $dx$  وإرتفاعها  $h = f(x) - g(x)$  .

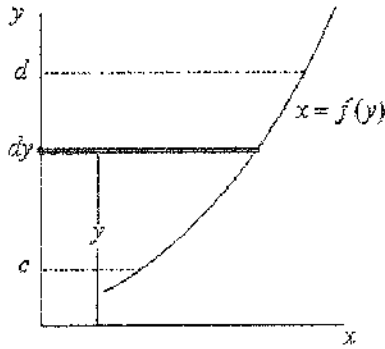


مساحة المنطقة الكلية هي:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \text{ square units}$$

نلاحظ أن الحالة السابقة هي حالة خاصة من هذه الحالة وذلك بأخذ المنحنى الأسفل هو محور السينات ( $g(x)=0$ ) .

ملاحظة: في حالة المنطقة المحصورة من أعلى أو أسفل (أو من الجانبين معاً) بأكثر من منحنى، نقسم المساحة إلى عدد من المناطق بحيث يكون كل منها محدود بمنحنى واحد من أعلى أو من أسفل. وتصبح المساحة عبارة عن مجموع مساحات هذه المناطق. كذلك يمكن إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة  $x=f(y)$  ومحور الصادات في الفترة  $c \leq y \leq d$ ، حيث أن الدالة  $f(y)$  موجبة لكل قيم  $y$  . بتقسيم المساحة إلى شرائح أفقية عرض كل منها  $dy$  وطولها  $x=f(y)$  وتكون مساحة الشريحة هي

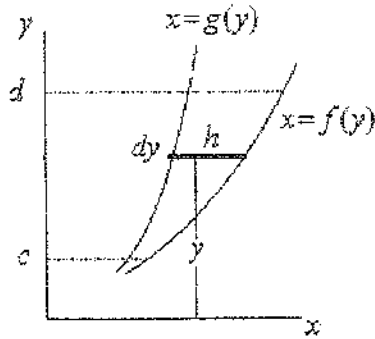


$dA = x dy$  ، وتصبح المساحة المطلوبة

$$A = \int_c^d x dy = \int_c^d f(y) dy \text{ وحدة مربعة}$$

كذلك لإيجاد مساحة محدودة بمنحنيين معادلتها  $x = f(y)$  و  $x = g(y)$  في الفترة

$c \leq y \leq d$  حيث أن  $f(y) \geq g(y)$  . بتقسيم



المساحة إلى شرائح أفقية وأخذ إحداها ارتفاعه  $h = f(y) - g(y)$  وعرضه  $dy$

تكون المساحة الكلية :

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)] dy \text{ وحدة مربعة}$$

ملاحظة: في حالة المنطقة المحصورة من اليمين أو من اليسار (أو من الجانبين معاً) بأكثر من منحنى، نقوم بتقسيم المساحة إلى عدد من المناطق بحيث يكون كل منها محدود بمنحنى واحد من اليمين أو من اليسار. وتصبح المساحة عبارة عن مجموع مساحات هذه المناطق.

\* ويمكن تحديد طريقة تقسيم المساحة كما يلي:

- نأخذ عنصر المساحة رأسى إذا كانت المساحة محدودة بمنحنى واحد من أعلى وكذلك من أسفل.

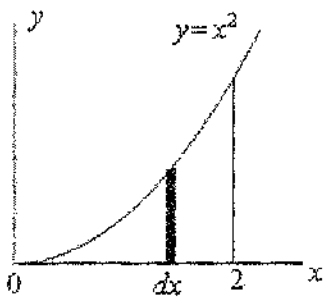
- نأخذ عنصر المساحة أفقي إذا كانت المساحة محدودة بمنحنى واحد من اليمين وكذلك من اليسار.

- أحيانا شكل التكامل الناتج هو الذى يعطى الأفضلية لطريقة التقسيم.

\* يجب ملاحظة أنه من الضرورى رسم المنحنيات التى تتحدد بها المنطقة المستوية المطلوب إيجاد مساحتها وذلك لتحديد طريقة التقسيم المناسبة، وإذا كان المطلوب حساب مساحة منحنى فالمقصود هو المساحة المحصورة داخل هذا المنحنى وإذا ما كان للمنحنى تماثل يفضل حساب جزء من المساحة (مثلاً: النصف أو الربع) ومنه نوجد المساحة الكلية.

مثال (1) احسب مساحة الشكل المحدود بالمنحنى  $y=x^2$  ومحور  $x$  والمستقيمان  $x=0$  ,  $x=2$ .

الحل إذا قسمنا المساحة إلى شرائح رأسية طول كل منها يساوى  $y=x^2$  وعرضها  $dx$

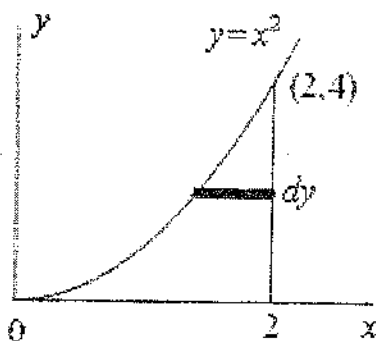


$dx$  وتكون مساحة إحدى الشرائح هي  $x^2 dx$ . وبالتالي فإن المساحة الكلية تساوى:

$$A = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3} \quad \text{وحدة مربعة}$$

هل آخر إذا قسمنا هذه المساحة إلى شرائح أفقية فإن مساحة إحدى الشرائح هي

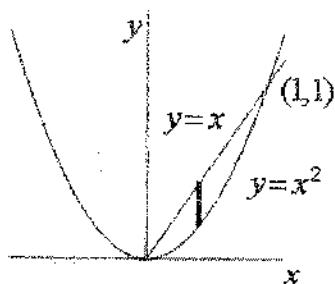
$$dA = (2 - \sqrt{y}) dy$$



وبالتالى فإن المساحة هي:

$$A = \int_0^4 (2 - \sqrt{y}) dy = \left[ 2y - \frac{2}{3} y\sqrt{y} \right]_0^4 = \frac{8}{3} \text{ وحدة مربعة}$$

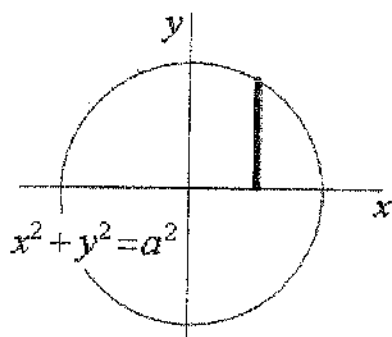
مثال (٢) أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين  $y=x$ ,  $y=x^2$ .  
الحل يرسم المنحنيات نحدد المنطقة المراد إيجاد مساحتها. بحل المعادلتين معاً (لنحصل على حدود التكامل) نجد أن المنحنيين يتقاطعان فى النقطتين  $(0,0)$  و  $(1,1)$ .



نقسم المساحة إلى شرائح رأسية طول كل منها يساوى  $x - x^2$  وعرضها  $dx$ ، فإن المساحة المطلوبة تصبح

$$A = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6} \text{ وحدة مربعة}$$

مثال (٣) باستخدام التكامل المحدود أوجد مساحة الدائرة  $x^2 + y^2 = a^2$ .  
الحل سوف نقوم بحساب مساحة ربع الدائرة الموجود بالربع الأول بأخذ شريحة رأسية طولها  $\sqrt{a^2 - x^2}$  وعرضها  $dx$ .



وبالتالى فإن المساحة الكلية للدائرة هي

$$A = 4 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

باستخدام التعويض  $x = a \sin \theta$  فيكون

$$dx = a \cos \theta d\theta$$

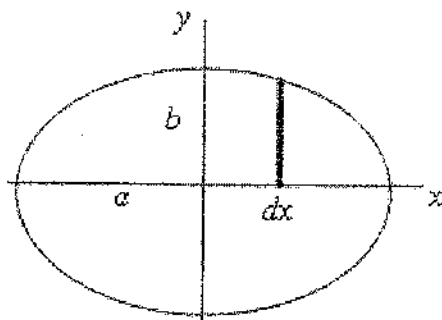
$$\therefore A = 4 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 4a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta$$

$$= 2a^2 (\theta + \cos \theta \sin \theta) \Big|_0^{\pi/2} = \pi a^2 \quad \text{square units}$$

مثال (٤) أوجد المساحة المحصورة داخل القطع الناقص  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

الحل القطع الناقص متماثل بالنسبة لمحاور الإحداثيات ومركزه نقطة الأصل. لذلك يمكن حساب المساحة الموجودة بالربع الأول ثم نضرب الناتج

فى 4. نأخذ عنصر مساحة رأسى مساحته تساوى  $dA = y dx$  ويكون



$$A = 4 \int_0^a y dx = 4 \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

بإجراء التكامل كما سبق فى مثال

$$A = \pi ab \quad (٤)$$

## تمارين

(١) أوجد المساحة بين المنحنيين

a)  $y=x^2$ ,  $y=x+6$

b)  $y=2x-1$ ,  $x=y^2-2y$

c)  $y=2x-x^2$ ,  $y=-x$

d)  $y=\sqrt{x}$ ,  $y=x^2$

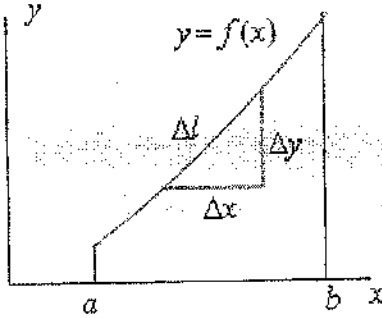
(٢) أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى  $y=\sin x$  ومحور  $x$  حيث  $0 \leq x \leq \pi$ .

(٣) أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى  $y=x^2-2x$  والمستقيم  $y=2$ .

## أطوال المنحنيات Lengths of Plane Curves

لإيجاد طول جزء المنحنى الواقع بين  $x=a$ ,  $x=b$  نقسمه إلى أجزاء صغيرة طول إحداها

$dl$  . من الرسم نجد أن



$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

ومنها فإن عنصر الطول يعطى

$$dl = \sqrt{1 + y'^2} dx \quad \text{بالعلاقة}$$

ويكون طول المنحنى

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx \quad \text{units} \quad (1)$$

إذا كانت معادلة المنحنى على الصورة  $(x=g(y))$  فإن طول المنحنى فى الفترة  $c \leq y \leq d$  يُعطى بالعلاقة:

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + (dx/dy)^2} dy \quad \text{units}$$

إذا كانت معادلات المنحنى البارامترية هى  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$  فإننا نحسب  $y' = \frac{dy/dt}{dx/dt}$  و  $dx = \frac{dx}{dt} dt$  ونعوض فى التكامل وكذلك عن حدود التكامل لتصبح بالنسبة إلى  $t$ .

أما فى حالة المعادلة القطبية  $r=r(\theta)$  فإنه المعادلات البارامترية للمنحنى تصبح  $x=r(\theta)\cos\theta$ ,  $y=r(\theta)\sin\theta$  ومنها نحصل على

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \cos\theta - r \sin\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \sin\theta + r \cos\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r \cos \theta}{\frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta}, \quad dx = \left( \frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta \right) d\theta$$

بالتعويض في العلاقة (1) نحصل على

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2} d\theta$$

ملاحظة: عند حساب أطوال منحنيات ليس من الضروري رسم المنحنى. وعند حساب طول منحنى مغلق يفضل استخدام المعادلات البارامترية أو إذا كان المنحنى متماثلاً نحسب جزء من المنحنى (النصف أو الربع مثلاً).

مثال (1) أوجد طول جزء المنحنى  $y = x^2$  المحصور بين النقطتين  $(0,0)$  و  $(1,1)$ .

الحل بما أن معادلة المنحنى هي  $y = x^2$ ، إذن  $y' = 2x$  ونحصل على

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx$$

لحساب التكامل نستخدم طريقة التجزئ

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{1 + 4x^2} dx = x\sqrt{1 + 4x^2} - \int \frac{4x^2}{\sqrt{1 + 4x^2}} dx \\ &= x\sqrt{1 + 4x^2} - I + \int \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2}} dx \Rightarrow I = \frac{1}{2} x\sqrt{1 + 4x^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1} 2x \end{aligned}$$

$$L = \frac{1}{2} \sqrt{5} + \frac{1}{4} \sinh^{-1} 2 \quad \text{units}$$

مثال (2) احسب طول المنحنى  $y = \ln(\cos x)$  بين  $x = 0$ ،  $x = \frac{\pi}{4}$ .

الحل لدينا  $y' = -\tan x$  إذن طول المنحنى يساوى

$$L = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2 x} dx = \int_0^{\pi/4} \sec x dx = \ln [\sec x + \tan x]_0^{\pi/4} = \ln(\sqrt{2} + 1)$$

مثال (٣) أوجد طول جزء المنحنى  $x = y^2$  المحصور بين النقطتين  $(0,0)$  و  $(1,1)$ .

الحل بما أن معادلة المنحنى هي  $x = y^2$  ، إذن  $\frac{dx}{dy} = 2y$  ونحصل على

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_0^1 \sqrt{1 + 4y^2} dy = \frac{1}{2} \sqrt{5} + \frac{1}{4} \sinh^{-1} 2$$

مثال (٤) أوجد طول المنحنى القلبي  $r = (1 - \cos \theta)$

الحل بما أن  $\frac{dr}{d\theta} = \sin \theta$  فإن عنصر الطول يساوى

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = \sqrt{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} d\theta \\ &= \sqrt{2(1 - \cos \theta)} d\theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} d\theta \end{aligned}$$

حيث أن المنحنى مغلق ، نتعامل مع طول نصف المنحنى لنحصل على الطول الكلى

$$L = 2 \int_0^{\pi} 2 \sin \frac{\theta}{2} d\theta = 2 \left( -4 \cos \frac{\theta}{2} \right)_0^{\pi} = 4 \quad \text{units}$$

### تمارين

(١) أوجد طول القوس من المنحنى  $x=t^2$ ,  $y=t^3$  بين النقطتين

$$(0,0), (1,1)$$

(٢) أوجد طول القوس من المنحنى  $y=x^2-x+2$  بين  $x=0$  والنقطة

$$x=3$$

(٣) أوجد طول القوس من المنحنى  $x=t-\sin t$ ,  $y=1-\cos t$  حيث

$$0 \leq t \leq \pi/4$$

(٤) أوجد طول القوس من المنحنى  $x=3t^2$ ,  $y=2t^2$  حيث  $1 \leq t \leq 3$

(٥) أوجد طول القوس من المنحنى  $y=\sin^{-1} x$  حيث  $0 \leq x \leq 1$

# الجزء الثالث الجبر

## ALGEBRA

- الباب الأول الأعداد المركبة
- الباب الثاني نظرية المعادلات
- الباب الثالث المحددات
- الباب الرابع المتصفقات



## الباب الأول

### الأعداد المركبة

#### Complex Numbers

تمهيد: إذا كانت فكرة العدد الحقيقي تصلح لحل المعادلة  $x^2 = 1$  (بالصورة  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ويكون جذرا المعادلة هما  $1, -1$ ) فإنها لا تصلح لتعيين جذور المعادلة  $x^2 = -1$  إذ من المعلوم أن المقدار  $x^2 + 1$  لا يتحلل لأنه مجموع مربعين، وهنا ظهرت الحاجة إلى تعريف العدد  $\sqrt{-1}$  ويرمز له بالرمز

$$i \text{ أى } (i = \sqrt{-1}) \text{ وبالتالي يمكن تحليل } x^2 + 1 \\ x^2 + 1 = (x - \sqrt{-1})(x + \sqrt{-1}) \\ = (x - i)(x + i)$$

ويكون جذرا المعادلة هما  $\pm \sqrt{-1}$  أو  $\pm i$

ولما كانت  $i = \sqrt{-1}$  فإن:

$$i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1 \quad (i^2 = -1) \\ i^3 = i \cdot i \cdot i = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i \\ i^4 = i \cdot i \cdot i \cdot i = (i \cdot i) \cdot (i \cdot i) = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$$

وهكذا

#### تعريف العدد المركب:

العدد المركب  $z$  يتكون من جزأين جزء حقيقي وآخر تخيلي ويكتب بالصورة  $z = a + ib$  وتسمى الصورة الكارتيزية للعدد المركب  $z$  حيث  $a, b$  عدداً حقيقياً ويسمى  $a$  الجزء الحقيقي للعدد المركب  $z$  وتكتب  $\text{Re } z = a$  وتسمى  $b$  الجزء التخيلي للعدد المركب  $z$  وتكتب  $\text{Im } z = b$ .

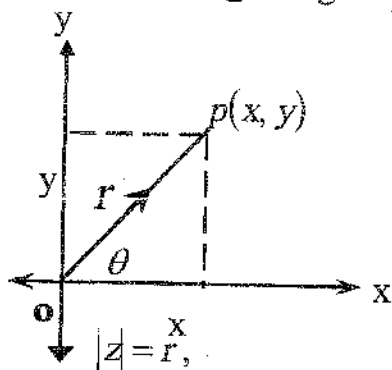
وإذا كانت  $b = 0$  فإن العدد  $z$  يسمى عدد حقيقي وكذلك إذا كانت  $a = 0$  فإن العدد  $z$  يصبح تخيلياً. ويفهم مما سبق أن مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  The set of complex numbers هي أكبر مجموعة في مجموعات الأعداد إذا أنها

تحتوى مجموعة الأعداد الحقيقية  $R$  والتي تحتوى كل مجموعات الأعداد المعروفة.

### تمثيل العدد المركب:

العدد المركب  $z = x + iy$  يمكن تمثيله كزوج مرتب  $z = (x, y)$

فى المستوى المركب والذى يسمى مستوى Argand فى صورة نقطة P



احداثياتها  $x, y$  ويكون مقدار أو طول

المتجه  $\overline{op}$  يمثل مقياس العدد  $|z|$

وتسمى الزاوية  $\theta$  المحصورة بين

$\overline{op}$  ومحور  $x$  فى الاتجاه الموجب

سعة العدد أى أن:

$$\arg z = \theta$$

وبتحليل  $r$  فى الاتجاهين المتعامدين يكون:

$$x = r \cos \theta, \quad (1)$$

$$y = r \sin \theta \quad (2)$$

وبالتعويض من (١)، (٢) يكون

$$z = x + iy$$

$$= r \cos \theta + ir \sin \theta$$

$$= r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (3)$$

وتسمى الصورة (٣) بالصورة القطبية للعدد المركب.

ولما عرف أويلر الدالة الأسية  $e^{i\theta}$  بالصورة القطبية

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

فكتب العدد المركب  $z$  بالصورة

$$z = re^{i\theta}$$

بالتربيع والجمع من (١)، (٢) نحصل على

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ثم بقسمة (٢) على (١) يكون

$$\arg z = \theta = \tan^{-1}(y/x)$$

مرافق العدد المركب:

إذا كان  $z = x + iy$  عددا مركبا فإن العدد المركب  $\bar{z} = x - iy$  يسمى مرافق العدد  $z$  كما أن العدد  $z$  هو مرافق العدد  $\bar{z}$ .

ويمكننا بسهولة إثبات الخواص الآتية لعملية المرافق

$$\overline{\bar{z}} = z, \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{\left( \frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

العمليات الأساسية على الأعداد المركبة:

إذا كان لدينا العددين المركبين  $z_1, z_2$  بحيث

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

فإن

$$* \quad z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$* \quad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

أى نجمع الجزء الحقيقي على الجزء الحقيقي، الجزء التخيلي على الجزء التخيلي.

$$* \quad z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$* \quad z_1 / z_2 = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

لتعيين  $z_1 / z_2$  ضربنا في مرافق المقام.

ويقال للعددين المركبين  $z_1, z_2$  أنهما متساويان فقط إذا كان

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2$$

## نظرية:

الخواص التالية تتحقق لمقياس العدد  $z$

$$1- |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$2- |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$3- \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = |z_1| / |z_2|$$

## مثال (1)

$$(1) \quad \text{أوجد حاصل ضرب } (2+3i)(3-2i)$$

$$(2) \quad \text{ب) اختصر المقدار } \left( \frac{2+i}{2-i} \right)^2 \text{ ثم أوجد مقياسه وسعته}$$

## الحل (أ)

$$(2+3i)(3-2i) = (6+6) + i(9-4) = 12+5i$$

## (ب)

$$\begin{aligned} \left( \frac{2+i}{2-i} \right)^2 &= \left( \frac{2+i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2-i} \right)^2 = \left( \frac{3+4i}{5} \right)^2 = \frac{-7+24i}{25} = \\ &= \frac{-7}{25} + \frac{24}{25}i \end{aligned}$$

$$\text{مقياس العدد } \left| \left( \frac{2+i}{2-i} \right)^2 \right| = \sqrt{\left( \frac{-7}{25} \right)^2 + \left( \frac{24}{25} \right)^2} = 1$$

$$\text{سعة العدد } \arg \left( \frac{2+i}{2-i} \right)^2 = \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \tan^{-1} \left( \frac{-24}{7} \right)$$

## نظرية دي موافر:

إذا كانت  $n$  عددا نسبيا فإن

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

مثال (٢) اختصر

$$\frac{(\cos \theta + i \sin \theta)^4 (\cos 2\theta - i \sin 2\theta)}{(\cos \theta - i \sin \theta)^8 (\cos 3\theta - i \sin 3\theta)} \cdot \frac{(\cos \theta + i \sin \theta)^4 (\cos \theta + i \sin \theta)^{-2}}{(\cos \theta + i \sin \theta)^{-8} (\cos \theta + i \sin \theta)^{-3}} = (\cos \theta + i \sin \theta)^{13}$$

$$= \cos(13\theta) + i \sin(13\theta)$$

**نظريات على نظرية دي موافر:**

(١) مفكوك  $\sin n\theta, \cos n\theta, \tan n\theta$  بدلالة قوى النسب المثلثية

للزاوية  $\theta$  حيث  $n$  عدد صحيح موجب.

من نظرية دي موافر نعلم أن

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

فإذا كانت  $n$  عددا صحيحا موجبا، يمكن فك الطرف الأيمن بنظرية ذات الحدين

بدلالة قوى  $\sin \theta, \cos \theta$  ثم بمساواة الجزأين الحقيقيين والجزأين التخيليين في

الطرفين نحصل على مفكوكي  $\cos n\theta, \sin n\theta$ .

**مثال (٣)**

أوجد مفكوك  $\cos 4\theta, \sin 4\theta, \tan 4\theta$

**الحل:** من نظرية دي موافر

$$\begin{aligned} \cos 4\theta + i \sin 4\theta &= (\cos \theta + i \sin \theta)^4 \\ &= \cos^4 \theta + \binom{4}{1} \cos^3 \theta (i \sin \theta) + \binom{4}{2} \cos^2 \theta (i \sin \theta)^2 \\ &\quad + \binom{4}{3} \cos \theta (i \sin \theta)^3 + \binom{4}{4} (i \sin \theta)^4 \\ &= \cos^4 \theta + 4i \cos^3 \theta \sin \theta - 6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ &\quad - 4i \cos \theta \sin^3 \theta + \sin^4 \theta \end{aligned}$$

وبمساواة الجزء الحقيقي في الطرفين وكذلك الجزء التخيلي في الطرفين نحصل على

$$\cos 4\theta = \cos^4 \theta - 6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta,$$

$$\sin 4\theta = 4 \cos^3 \theta \sin \theta - 4 \cos \theta \sin^3 \theta$$

والحصول على  $\tan 4\theta$  نكتب  $\cos 4\theta, \sin 4\theta$  بالصورة

$$\cos 4\theta = \cos^4 \theta [1 - 6 \tan^2 \theta + \tan^4 \theta],$$

$$\sin 4\theta = \cos^4 \theta [4 \tan \theta - 4 \tan^3 \theta]$$

ويكون

$$\therefore \tan 4\theta = \frac{4 \tan \theta - 4 \tan^3 \theta}{1 - 6 \tan^2 \theta + \tan^4 \theta}$$

تمرين: أوجد مفكوك  $\sin 5\theta, \cos 5\theta, \tan 5\theta$  بدلالة قوى النسب المثلثية للزاوية  $\theta$ .

حاول أن تصل إلى النتائج التالية:-

$$\sin 5\theta = 5 \cos^4 \theta \sin \theta - 10 \cos^2 \theta \sin^3 \theta + \sin^5 \theta,$$

$$\cos 5\theta = \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta,$$

$$\tan 5\theta = \frac{5 \tan \theta - 10 \tan^3 \theta + \tan^5 \theta}{1 - 10 \tan^2 \theta + 5 \tan^4 \theta}$$

(٢) التعبير عن قوى  $\cos \theta, \sin \theta$  بدلالة النسب المثلثية

لمضاعفات الزاوية  $\theta$

إذا فرضنا أن

$$\cos \theta + i \sin \theta = z \quad (1)$$

فإن

$$\cos \theta - i \sin \theta = \frac{1}{z} \quad (2)$$

وبالجمع في (١)، (٢) وكذلك بطرح (٢) من (١) نحصل على

$$2\cos\theta = z + \frac{1}{z} \quad (3)$$

$$2i\sin\theta = z - \frac{1}{z} \quad (4)$$

وباستخدام نظرية دي موافر

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = z^n \quad (5)$$

$$\cos n\theta - i\sin n\theta = \frac{1}{z^n} \quad (6)$$

$$2\cos n\theta = z^n + \frac{1}{z^n}, \quad (7)$$

$$2i\sin n\theta = z^n - \frac{1}{z^n} \quad (8)$$

وعلى هذا فالمقادير التي تحتوى على  $\cos\theta, \sin\theta$  يمكن التعبير عنها بدلالة قوى  $z$ ، وذلك بالتعويض من (٣)، (٤) وباستخدام نظرية ذات الحدين ثم من (٧)، (٨) يمكن كتابة الناتج بدلالة  $\cos n\theta, \sin n\theta$ . وباستخدام العلاقات ٣، ٤، ٧، ٨ يمكن التعبير عن قوى  $\cos\theta, \sin\theta$  بدلالة النسب المثلثية لمضاعفات الزاوية  $\theta$ .

**مثال (٤)** عبر عن  $\cos^4\theta$  بدلالة النسب المثلثية لمضاعفات الزاوية  $\theta$ .

**الحل:** من (٣)

$$2\cos\theta = z + \frac{1}{z}$$

$$(2\cos\theta)^4 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^4$$

$$\begin{aligned} \cos^4\theta &= \frac{1}{16} \left[ z^4 + \binom{4}{1} z^3 \cdot \frac{1}{z} + \binom{4}{2} z^2 \cdot \frac{1}{z^2} + \binom{4}{3} z \cdot \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} \right] \\ &= \frac{1}{16} \left[ z^4 + 4z^2 + 6 + 4\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{16} \left[ \left( z^4 + \frac{1}{z^4} \right) + 4 \left( z^2 + \frac{1}{z^2} \right) + 6 \right] \\
&= \frac{1}{16} [2 \cos 4\theta + 8 \cos 2\theta + 6] \\
&= \frac{1}{8} [\cos 4\theta + 4 \cos 2\theta + 3].
\end{aligned}$$

### جذور الأعداد المركبة:

يسمى العدد المركب  $z = a(\cos \phi + i \sin \phi)$  بالجنر ذات الدرجة  $n$  -  
 $(n^{\text{th}} \text{ root})$  للعدد المركب  $r(\cos \theta + i \sin \theta)$  ونرمز له بالرمز  
 $z^n = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  إذا كانت  $\sqrt[n]{r}(\cos \theta + i \sin \theta)$   
 وباستخدام نظرية دي موافر حيث  $n$  عدد صحيح موجب فإن:-

$$\begin{aligned}
z &= [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[ \cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right] \\
&= r^{\frac{1}{n}} \left[ \cos \frac{2\pi k + \theta}{n} + i \sin \frac{2\pi k + \theta}{n} \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1
\end{aligned}$$

أضفنا المقدار  $2k\pi$  إلى السعة لأنه لا يغير من قيم  $\sin \theta, \cos \theta$  حيث أنهما  
 دوال دورية دورتها  $2\pi$ .

أى أنه يوجد عدد  $n$  من الجذور المختلفة.

إذن  $\sqrt[n]{z}$  له  $n$  من القيم المختلفة وهى تقع على محيط دائرة مركزها نقطة  
 الأصل ونصف قطرها  $\sqrt[n]{|z|}$  وتقسم محيط الدائرة إلى  $n$  من الأجزاء المتساوية.

- أى عدد مركب مطلوب الحصول على جذوره يكتب بدلالة واحدة

من الأربعة أعداد التالية

$$1 = \cos 0 + i \sin 0$$

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$-1 = \cos \pi + i \sin \pi$$

$$-i = \cos \left( -\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right)$$

للحصول على جذور أى عدد مركب نتبع الخطوات التالية:-

١- نكتب العدد فى الصورة القطبية.

٢- نضيف المقدار  $2k\pi$  إلى سعة العدد حيث

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

٣- نطبق نظرية دي موافر

### الجذور ذات الدرجة $n$ للواحد الصحيح:-

لإيجاد جميع قيم المقدار  $\sqrt[n]{1}$  وعددها  $n$ ، نكتب العدد 1 بالصورة

$$1 = \cos 0 + i \sin 0$$

إذن

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{0 + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{0 + 2\pi k}{n}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

وعلى هذا فجميع القيم المختلفة للجذر  $\sqrt[n]{1}$  تسمى (الجذور ذات الدرجة  $n$  للواحد الصحيح) وهى

$$1, \left( \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right), \left( \cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n} \right), \dots, \dots, \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

ونلاحظ أن مقياس كل جذر من هذه الجذور هو 1 وأن الفرق بين سعته كل

جذرين متتاليين هو  $\frac{2\pi}{n}$  وفى مستوى أرجاند تقع جميع الجذور على محيط دائرة

نصف قطرها الوحدة، وتقسم محيط الدائرة إلى  $n$  من الأقواس المتساوية. وإذا

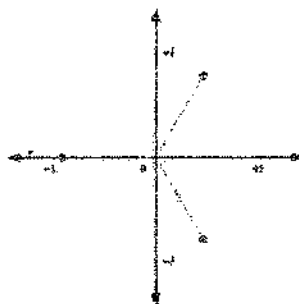
رمزنا للقيمة الثانية بالرمز  $\omega$  فباستخدام نظرية دي موافر نرى أن قيم الجذر  $\sqrt[n]{1}$

يمكن كتابتها بالصورة

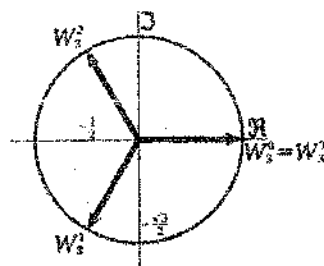
$$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$$

لاحظ أن  $\sqrt{z}$  يسمى الجذر التربيعى لـ  $z$ ، Square root  $z$ ،  $\sqrt[3]{z}$  يسمى الجذر

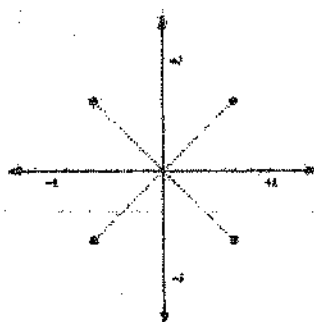
التكعيبي لـ  $z$ ،  $\sqrt[4]{z}$  يسمى الجذر الرباعى لـ  $z$ ، ... وهكذا.



Square roots of  $i$



The three 3rd roots of 1



The four 4th roots of  $-1$

مثال (٥):

١- أوجد الجذور التكعيبية للعدد  $8i$

٢- أوجد قيم المقدار  $8^{2/3}$

٣- أوجد قيم المقدار  $(-i)^{3/4}$

٤- أوجد جذر المعادلة  $x^5 + 32 = 0$

الحل:

$$(1) \quad z = \sqrt[3]{8i} = (8i)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} (i)^{\frac{1}{3}} = 2 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 2 \left[ \cos \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3} \right], \quad k=0,1,2$$

وتكون الجذور التكعيبية للعدد  $8i$  هي:

$$z_0 = 2 \left[ \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right]$$

$$z_1 = 2 \left[ \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right]$$

$$z_2 = 2 \left[ \cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6} \right].$$

$$(2) \quad z = 8^{2/3} = 8^{2/3} (1)^{2/3} = 4(\cos 0 + i \sin 0)^{2/3}$$

بالمثل

$$= 4 \left[ \cos \frac{4k\pi}{3} + i \sin \frac{4k\pi}{3} \right], \quad k=0,1,2$$

بالتعويض بقيم  $k$  نحصل على الجذور المطلوبة.

$$(3) \quad (-i)^{3/4} = \left[ \cos \left( \frac{-\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{-\pi}{2} \right) \right]^{3/4} = \left[ \cos \left( \frac{-3\pi}{8} \right) + i \sin \left( \frac{-3\pi}{8} \right) \right]$$

$$= \cos \frac{3\pi + 2k\pi}{8} - i \sin \frac{3\pi + 2k\pi}{8}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

ونحصل على الجذور المطلوبة بالتعويض بقيم  $k$ .

$$(4) \quad x^5 = -32 \Rightarrow x = (-32)^{\frac{1}{5}} = (32)^{\frac{1}{5}}(-1)^{\frac{1}{5}} = 2(\cos \pi + i \sin \pi)^{1/5}$$

$$= 2 \left( \cos \frac{2k\pi + \pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi + \pi}{5} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

وبالتعويض بقيم  $k$  نحصل على الجذور الخماسية للعدد  $-32$  وهي:-

$$z_0 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right),$$

$$z_1 = 2 \left( \cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5} \right)$$

$$z_2 = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{5} + i \sin \frac{5\pi}{5} \right)$$

$$= 2 \cos \pi + i \sin \pi$$

$$z_3 = 2 \cos \frac{7\pi}{5} + i \sin \frac{7\pi}{5}$$

$$z_4 = 2 \left( \cos \frac{9\pi}{5} + i \sin \frac{9\pi}{5} \right)$$

## تمارين على الأعداد المركبة

١- إذا كان  $z_1 = 2 + i$ ,  $z_2 = 3 - 2i$  أوجد قيمة:

$$(i) |3z_1 - 4z_2| \quad (ii) (\bar{z}_2)^2 \quad (iii) \left| \frac{2z_2 + z_1 - 5 - i}{2z_1 - z_2 + 3 - i} \right|^2$$

٢- أوجد العددين الحقيقيين  $x, y$  بحيث أن:

$$3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$$

٣- إذا كان  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$  أثبت أن

$$(i) \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad (ii) |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

٤- اكتب كلا من الأعداد التالية في الصورة القطبية وكذلك في صورة أولر.

$$(i) 2 + 2\sqrt{3}i \quad (ii) -5 + 5i \quad (iii) -3i$$

٥- إذا كان  $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$  كان

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

أثبت أن  $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$ ,

$$z_1 / z_2 = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

٦- أوجد المقياس والسعة لكل من:

$$\frac{1}{4 + 3i}, \quad \left( \frac{1+i}{1-i} \right)^3, \quad \left( \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} \right)^{10}$$

٧- أ. أوجد جميع قيم  $z$  بحيث أن  $z^5 = 32$  ثم بين مواضع هذه القيم

في المستوى المركب.

ب. أوجد الجذرين التربيعيين للمقدار  $-1 + i$

ج. أوجد الجذور الخماسية للوحدة (الواحد الصحيح)

د. أوجد جذور المعادلات الآتية

(i)  $x^6 - 1 = 0$ ,

(ii)  $x^4 + i = 0$

٨- أوجد  $\sin 4\theta$ ,  $\cos 4\theta$  بدلالة قوى النسب المثلثية للزاوية  $\theta$ .

٩- أوجد  $\sin^4 \theta$ ,  $\cos^4 \theta$  بدلالة النسب المثلثية لمضاعفات الزاوية  $\theta$ .

## الباب الثاني Theory of Equations نظرية المعادلات

فى هذا الباب سنتعرض لبعض النظريات الهامة الخاصة بالمعادلات وحلولها وقد سبق أن درس الطالب فى المرحلة السابقة معادلة الدرجة الثانية وصورتها العامة  $ax^2 + bx + c = 0$  وكان جذرى المعادلة يعطيان بالصورة

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

والآن سنناقش المعادلات التى من درجة  $n$  فى مجهول واحد والتى على الصورة

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (1)$$

حيث  $a_0, a_1, \dots, a_n$  أعداد حقيقية

وهنا ينشأ سؤال هام هو هل يمكن الحصول على قانون عام نستخدمه كما هو الحال فى حالة معادلة الدرجة الثانية لحل معادلات من درجات أعلى من الثانية؟

مثل هذا القانون موجود للمعادلات التى من الدرجة الثالثة والرابعة فقط إلا أن استخدامهم معقد والمعادلات من الدرجة الأعلى من الدرجة الرابعة لا يوجد مثل هذا القانون (وقد أثبت آبل Abel) أن مثل ذلك القانون لا يمكن إيجاده وبالطبع فإن هذا لا يعنى أن المعادلة ليس لها جذور. فوجود القانون لإيجاد الجذور شئ ووجود الجذر نفسه شئ آخر. وسوف نورد فيما يلى بعض النظريات والنتائج التى تساعدنا فى الحصول على جذور المعادلة من درجات أعلى من الثانية.

### نظرية (١)

كل معادلة جبرية من درجة  $n$  (حيث  $n$  عدد صحيح موجب) على الصورة (١) لها على الأقل جذر واحد في مجال الأعداد المركبة (من الممكن أن يكون هذا الجذر حقيقى أو مركب) ومن هذه النظرية تنتج النتيجة الآتية:

نتيجة:

للمعادلة الجبرية التى من درجة  $n$  جذور (حقيقة أو مركبة) عددها  $n$ .

### نظرية (٢)

إذا كانت معاملات المعادلة (١) كلها حقيقية وكان هناك جذر مركب لهذه المعادلة على الصورة  $\alpha + i\beta$  فإن مرافق هذا الجذر  $\alpha - i\beta$  يكون أيضا جذر لهذه المعادلة.

### نتيجة (١)

عدد الجذور المركبة لأى معادلة جبرية يكون عددا زوجيا (معاملات المعادلة حقيقية).

### نتيجة (٢)

المعادلة الجبرية ذات المعاملات الحقيقية والتى من درجة فردية لها على الأقل جذر حقيقى واحد.

### نظرية (٣)

إذا كانت معاملات المعادلة (١) كلها أعداد قياسية فإنه إذا كان  $\alpha + \sqrt{\beta}$  جذرا للمعادلة فإن للمعادلة جذرا آخر على الصورة  $\alpha - \sqrt{\beta}$ . ويسمى  $\alpha - \sqrt{\beta}$  المرافق القياسى لـ  $\alpha + \sqrt{\beta}$  والعكس.

## المراقبة بين جذور المعادلة ومعاملاتها:

والآن لنكن  $P_1, P_2, \dots, P_n$  هي جذور للمعادلة (١) فإن  $P(x)$  يمكن كتابتها على الصورة

$$P(x) = a_0(x - P_1)(x - P_2) \dots (x - P_n) = 0$$

ومن ثم نستطيع بمقارنة المعاملات أن نستنتج العلاقات الآتية:

$$P_1 + P_2 + \dots + P_n = \frac{-a_1}{a_0} = \frac{\text{معامل } x^{n-1}}{\text{معامل } x^n}$$

بمعنى أن مجموع الجذور للمعادلة (١) يساوى

$$\frac{-a_1}{a_0} = \frac{\text{معامل } x^{n-1}}{\text{معامل } x^n}$$

$$\frac{a_2}{a_n} = \frac{\text{معامل } x^{n-2}}{\text{معامل } x^n} = \text{مجموع حاصل ضرب الجذور مأخوذة مثنى مثنى}$$

مجموع حواصل ضرب الجذور مأخوذة ثلاثة ثلاثة =

$$\frac{-a_3}{a_0} = \frac{\text{معامل } x^{n-3}}{\text{معامل } x^n}$$

$$\text{حاصل ضرب الجذور} = \frac{(-1)^n \times \text{الحد المطلق}}{a_0} \text{ حيث } n \text{ درجة المعادلة.}$$

وقد يتبادر إلى الذهن أنه بمعرفة هذه العلاقات يمكننا حل المعادلة

المعطاة ولكن فى واقع الأمر فإن أى محاولة للحذف لكى نوجد قيم الجذور ستبوء بالفشل أو تنتج المعادلة المراد حلها.

### أمثلة

مثال (١): إذا كانت جذور المعادلة  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$  تكون متوالية عددية فأوجد الجذور.

## الحل

نفرض أن الجذور هي  $a-b, a, a+b$  واضح أن مجموع الجذور هو

$$3a = \frac{-(-6)}{1} = 6 \Rightarrow a = 2$$

مجموع حاصل ضرب الجذور مثنى مثنى =  $\frac{x \text{ معامل}}{x^3 \text{ معامل}}$

$$a(a-b) + a(a+b) + (a-b)(a+b) = \frac{11}{1} = 11$$

$$3a^2 - b^2 = 11$$

بالتعويض عن قيمة  $a = 2$  نحصل على

$$12 - b^2 = 11 \Rightarrow b^2 = 1 \therefore b = \pm 1$$

وأى من القيمتين يصلح وتكون الجذور هي 1, 2, 3

ولكن من الأسهل أن نأخذ العلاقة

$$\text{حاصل ضرب الجذور} = (-1)^3 \frac{a_3}{a_0} = (-1) \cdot (-6) = 6$$

$$a(a-b)(a+b) = 6$$

وبوضع  $a = 2$

$$2(4 - b^2) = 6$$

$$4 - b^2 = 3$$

$$b^2 = 1$$

$$b = \pm 1$$

وتصبح الجذور 1, 2, 3

$$x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48 = 0 \text{ حل المعادلة (٢):}$$

إذا كان مجموع جذرين من جذور  $\frac{1}{x}$  منفرداً.

## الحل

نفرض أن الجذور هي  $a, b, c, d$

بحيث تحقق

$$a + b = 0 \Rightarrow a = -b$$

ومن ثم تكون الجذور هي  $a, -a, c, d$

$$-1 = \frac{\text{معامل } x^3}{\text{معامل } x^4} = \text{مجموع الجذور}$$

فيكون

$$c + d = -1 \quad (1)$$

$$\frac{\text{معامل } x^2}{\text{معامل } x^4} = \text{مجموع حاصل ضرب الجذور مثنى مثنى}$$

$$-a^2 + ac + ad - ac - ad + cd = -16$$

$$-a^2 + cd = -16 \quad (2)$$

$$\frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } x^4} = \text{مجموع حاصل ضرب الجذور ثلاثة ثلاثة}$$

$$-a^2c - a^2d + acd - acd = 4$$

$$-a^2(c + d) = 4 \quad (3)$$

$$(-1)^n \times \frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل } x^4} = \text{حاصل ضرب الجذور كلها}$$

$$-a^2cd = 48 \quad (4)$$

من (1)، (3) ينتج أن  $a^2 = 4$  ومن ثم ينتج أن  $a = \pm 2$

إذا كان  $a$  جذر فإن  $-a$  جذرا أيضا. فيكون  $2, -2$  جذران ومن (2) ينتج أن:

$$cd = -12$$

$$c + d = -1 \quad c = -d - 1$$

$$-(d+1)d = -12$$

$$d^2 + d - 12 = 0$$

$$(d-3)(d+4) = 0$$

ومن ثم إذا كان  $d = 3$  فإن  $c = -4$  وإذا كان  $d = -4$  فإن  $c = 3$  وعليه تكون جذور المعادلة هي  $2, -2, 3, -4$

مثال (٣): أوجد جذور المعادلة

$$x^4 - 7x^3 + 19x^2 - 23x + 10 = 0 \quad \text{إذا علم أن أحد جذورها } 2 + i$$

### الحل

حيث أن المعاملات كلها حقيقية فمن نظرية (٢) يكون  $2 - i$  جذرا لهذه

المعادلة ومن ثم تكون معادلة الدرجة الثانية التي جذورها  $2 \pm i$  هي

$$x^2 - 4x + 5 = 0 \quad \text{ومن ثم نجد أن المعادلة المعطاة يمكن كتابتها على الصورة}$$

$$(x^2 - 4x + 5)(x^2 + ax + b) = x^4 - 7x^3 + 19x^2 - 23x + 10$$

وبمقارنة المعاملات نجد أن  $b = 2$

$$5a - 4b = -23 \Rightarrow 5a = -15 \Rightarrow a = -3$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) = 0$$

ومن ثم تكون جذور المعادلة هي:

$$1, 2, 2 + i, 2 - i$$

ويمكن استخدام طريقة أخرى بأن نقسم

$$x^4 - 7x^3 + 19x^2 - 23x + 10 = 0 \quad \text{على } x^2 - 4x + 5$$

لنحصل على معادلة من الدرجة الثانية بحلها يتعين الجذران الآخران.

### الجذور المكررة للمعادلة:

نعلم أنه إذا كانت  $P_1, P_2, \dots, P_n$  هي جذور المعادلة  $P_n(x) = 0$  فإننا

نستطيع كتابتها على الصورة

$$P(x) = a_0(x - P_1)(x - P_2) \dots (x - P_n) = 0$$

وإذا كان للمعادلة  $P_n(x) = 0$  جذر  $x = p$  مكرر  $m$  مرة فقط فإننا نستطيع

كتابة المعادلة على الصورة

$$P(x) = (x - p)^m g(x)$$

حيث  $g(x)$  هي كثيرة حدود من الدرجة  $(n-m)$  ويكون  $g(p) \neq 0$  بإجراء التفاضل نجد أن

$$\begin{aligned} P'_n(x) &= m(x-p)^{m-1}g(x) + (x-p)^m g'(x) \\ &= (x-p)^{m-1} [mg(x) + (x-p)g'(x)] \end{aligned}$$

ومن ثم نجد أن المعادلة  $P'_n(x) = 0$  لها جذر  $x = p$  مكرر  $m-1$  مرة فقط وذلك لأن  $g(p) = 0$  وبالمثل نجد أن  $P'_n(x) = 0$  لها جذر  $x = p$  مكرر  $m-2$  مرة فقط وهكذا فإن  $P_n^{(r)}(x) = 0$  لها جذر  $x = p$  مكرر  $m-r$  مرة فقط.

مثال (٤): حل المعادلة

$$x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 44x + 24 = 0$$

إذا علمت أن لها جذر مكرر ثلاث مرات.  
من المقدمة النظرية قبل المثال يفهم أنه إذا كان هناك جذر مكرر ثلاث مرات فسيكون هذا الجذر هو جذر للمعادلة ومشتقتها الأولى ومشتقتها الثانية.

### الحل

$$P(x) = x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 44x + 24$$

$$P'(x) = 4x^3 - 27x^2 + 60x - 44$$

$$P''(x) = 12x^2 - 54x + 60$$

$$= 6(2x^2 - 9x + 10)$$

$$= 6(2x-5)(x-2)$$

نجد أن جذور  $P''(x) = 0$  هي  $x = 5/2, x = 2$

نعوض عن هاتين القيمتين في كل من  $P(x) = 0$ ،  $P'(x) = 0$  والذي يحقق

كلاهما معا فهو الجذر المكرر. نجد أن  $x = 2$  هو جذر مكرر ثلاث مرات ومن ثم نجد أن

$$P(x) = (x-2)^3(x-a)$$

ويمكن تعيين الجذر  $a$  من العلاقة

$$\text{مجموع الجذور} = 9 \Rightarrow 2+2+2+a=9$$

$$6+a=9$$

$\therefore a=3$  وبذلك تكون جذور المعادلة 2,2,2,3

### القسمة التركيبية

هي عملية إيجاد خارج القسمة والباقي عند قسمة كثيرة حدود على عامل من الدرجة الأولى.

مثال (٥)

أوجد خارج القسمة والباقي عند قسمة

$$2x^5 - 28x^3 + 11x^2 + 64 \text{ على } x+4$$

الحل:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -4 & 2 & 0 & -28 & 11 & 0 & 64 \\ & \downarrow & -8 & 32 & -16 & 20 & -80 \end{array}$$

$$2 \quad -8 \quad 4 \quad -5 \quad 20 \quad -16$$

∴ خارج القسمة هو  $2x^4 - 8x^3 + 4x^2 - 5x + 20$

والباقي هو -16

مثال (٦):

أوجد خارج القسمة والباقي عند قسمة

$$x^6 - 4x^5 - 149x^3 + 692 \text{ على } x-7$$

الحل:

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} 7 & 1 & -4 & 0 & -149 & 0 & 0 & 692 \\ & & 7 & 21 & 147 & -14 & -98 & -686 \end{array}$$

$$1 \quad 3 \quad 21 \quad -2 \quad -14 \quad -98 \quad 6$$

∴ خارج القسمة هو  $x^5 + 3x^4 + 21x^3 - 2x^2 - 14x - 98$

والباقي هو 6

**نظرية الباقي:** إذا كان باقى قسمة  $f(x)$  على  $x-a$  هو  $R$  فإن الباقي  $R$  يساوى  $f(a)$

بفرض أن  $g(x)$  هو خارج القسمة فإن

$$f(x) = (x-a)g(x) + R$$

بوضع  $x=a$  نحصل على المطلوب (نجد أن  $f(a) = R$ )

**ملاحظة:**

- إذا كانت  $f(a)$  تساوى صفر بمعنى أن الباقي يساوى صفر فإن

$x-a$  يكون عاملا من عوامل  $f(x)$  وتكون  $a$  جذر من

جذور المعادلة  $f(x) = 0$ .

**مثال (٧):**

أوجد باقى قسمة

$$x^4 - 2x^3 + x^2 + x + 1 \text{ على } x+3$$

**الحل:**

من نظرية الباقي يكون  $R = f(-3)$

$$\begin{aligned} R = f(-3) &= (-3)^4 - 2(-3)^3 + (-3)^2 + (-3) + 1 \\ &= 81 + 54 + 9 - 2 = 142 \end{aligned}$$

**تحويل المعادلات:**

سوف نقدم بعض القواعد الهامة لتحويل المعادلة إلى معادلة أخرى لها

علاقة بالمعادلة المعطاة:-

١- بوضع  $x -$  بدلا من  $x$  فى المعادلة  $f(x) = 0$  نحصل على

المعادلة التى جذورها تساوى جذور المعادلة  $f(x) = 0$  بإشارة

مخالفة.

٢- بوضع  $\frac{1}{x}$  بدلا من  $x$  فى المعادلة  $f(x) = 0$  نحصل على

المعادلة التى جذورها مقلوبات جذور المعادلة  $f(x) = 0$ .

٣- بوضع  $\frac{x}{n}$  بدلا من  $x$  فى المعادلة  $f(x)=0$  نحصل على المعادلة التى جذورها مضاعفات جذور المعادلة  $f(x)=0$  ، من المرات  $n$ .

٤- للحصول على المعادلة التى تنقص جذورها بمقدار  $b$  عن جذور المعادلة  $f(x)=0$  نقسم  $f(x)$  على  $b$  قسمة تركيبيية مطولة وتكون مجموعة البواقي مع الحد الأول من المعادلة الأصلية معاملات المعادلة المطلوبة.

### أمثلة

مثال (٨): أوجد المعادلة التى جذورها تساوى جذور المعادلة

$$x^5 - 10x^3 + 5x^2 - x + 2 = 0 \text{ بإشارات مخالفة.}$$

نضع  $-x$  بدلا من  $x$  فتكون المعادلة المطلوبة هي:

$$(-x)^5 - 10(-x)^3 + 5(-x)^2 - (-x) + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$-x^5 + 10x^3 + 5x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x^5 - 10x^3 - 5x^2 - x - 2 = 0$$

مثال (٩): أوجد المعادلة التى جذورها ثلاث أمثال جذور المعادلة

$$x^3 + 4x^2 - 7x + 6 = 0$$

نضع  $\frac{x}{3}$  بدلا من  $x$  فتكون المعادلة المطلوبة هي

$$\left(\frac{x}{3}\right)^3 + 4\left(\frac{x}{3}\right)^2 - 7\left(\frac{x}{3}\right) + 6 = 0 \Rightarrow x^3 + 12x^2 - 63x + 162 = 0$$

مثال (١٠): كون المعادلة التى تنقص جذورها بمقدار ٤ عن جذور المعادلة

$$x^4 - 6x^3 + 35x - 17 = 0$$

|   |   |    |    |     |     |
|---|---|----|----|-----|-----|
| 4 | 1 | -6 | 0  | 35  | -17 |
|   |   | 4  | -8 | -32 | 12  |

|   |   |    |    |   |      |
|---|---|----|----|---|------|
| 4 | 1 | -2 | -8 | 3 | (-5) |
|   |   | 4  | 8  | 0 | 3    |

|   |   |   |    |     |
|---|---|---|----|-----|
| 4 | 1 | 2 | 0  | (3) |
|   |   | 4 | 24 |     |

|   |   |   |      |
|---|---|---|------|
| 4 | 1 | 6 | (24) |
|   |   | 4 |      |

(1)   (10)

المعادلة المطلوبة هي  $x^4 + 10x^3 + 24x^2 + 3x - 5 = 0$

مثال (١١): أوجد المعادلة التي تزيد جذورها بمقدار 3 عن جذور المعادلة

$$4x^4 + 48x^3 + 151x^2 + 42x - 245 = 0$$

وبحل المعادلة الناتجة - أوجد جذور المعادلة الأصلية.

**الحل:**

المعادلة المطلوبة هي  $4x^4 - 65x^2 + 16 = 0$

$$(x^2 - 16)(4x^2 - 1) = 0$$

$$x = \pm 4, \quad x = \pm \frac{1}{2}$$

وتكون جذور المعادلة الأصلية (تتقص 3 عن هذه الجذور). فيكون

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -7, \quad x_3 = -2\frac{1}{2}, \quad x_4 = -3\frac{1}{2}$$

### معادلات الدرجة الثالثة:

تحل المعادلة العامة من الدرجة الثالثة  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

بطريقة تسمى طريقة كاردان، ونظرا لصعوبة استخدام هذه الطريقة فسوف نعطي بعض الملاحظات التي تساعدنا في حل بعض معادلات الدرجة الثالثة.

أ- إذا كان مجموع المعاملات للمعادلة يساوى صفر فإن العدد 1 يكون جذرا لهذه المعادلة وباستخدام القسمة التركيبية نقسم على 1 لنحصل من خارج القسمة على الجذرين الآخرين ويكون العدد (أى عددا) جذرا للمعادلة (أى معادلة) إذا كان الباقي مساويا للصفر.

ب- إذا كان مجموع المعاملات باعتبار إشارة مخالفة لمعاملات حدود الدرجات الفردية فإن العدد -1 يكون جذرا للمعادلة ونتبع ما سبق للحصول على الجذرين الآخرين.

ج إذا كانت معاملات المعادلة أعداد صحيحة وهى من درجة فردية يكون لها جذر حقيقى واحد على الأقل من عوامل الحد المطلق.

مثال (١٢):

$$\text{حل المعادلة } x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

الحل:

واضح أن مجموع المعاملات للمعادلة يساوى الصفر فيكون العدد 1 أحد

جذور المعادلة نستخدم القسمة التركيبية

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

وبحل المعادلة  $x^2 - 5x + 6 = 0$  نحصل على الجذرين الآخرين

$$(x-3)(x-2) = 0 \quad x=3, x=2$$

وتكون جذور المعادلة 1, 2, 3

### مثال (١٣)

$$\text{حل المعادلة } x^3 - 9x^2 + 33x - 65 = 0$$

العدد 1 وكذلك العدد -1 لا يمثل أى منهما جذرا للمعادلة ويحلل الحد المطلق

تكون عوامله  $\pm 5, \pm 13$  وبالتجريب نستطيع تعيين جذرا من الجذور

$$\begin{array}{r|rrrr} 5 & 1 & -9 & 33 & -65 \\ & & 5 & -20 & 65 \\ \hline & 1 & -4 & 13 & 0 \end{array}$$

ويتعين الجذران الآخران بحل المعادلة  $x^2 - 4x + 13 = 0$  لتصبح جذور

$$\text{المعادلة } 5, 2 \pm 3i$$

### معادلات الدرجة الرابعة:

تستخدم طريقة فرارى لحل المعادلة العامة من الدرجة الرابعة، ونتركها لطلاب التخصص علما بأن الملاحظتين أ، ب المذكورتين فى معادلة الدرجة الثالثة تنطبقان على أى معادلة من أى درجة، ولكن على العموم هذه الملاحظات تساعد فى حل المعادلات التى تتحقق فيها هذه الشروط ولكننا لا نستطيع حل المعادلة باستخدام هذه الملاحظات بشكل عام.

## تمارين على نظرية المعادلات

١- أوجد خارج القسمة والباقي عند قسمة

$$3x^5 + 11x^4 + 90x^2 - 19x + 53 \text{ على } x+5$$

٢- أوجد خارج القسمة والباقي عند قسمة

$$3x^7 - 12x^5 - 2x^4 - 5x + 27 \text{ على } x+2$$

٣- أوجد جذور المعادلة  $x^3 + 9x^2 + 11x - 21 = 0$  إذا علمت أن

جذورها في توال عددي.

٤- أوجد جذور المعادلة  $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$  إذا كانت

جذورها في توال هندسي.

٥- أوجد المعادلة التي تنقص جذورها بمقدار 2 عن جذور المعادلة

$$x^4 - 9x^2 + 4x = 12 = 0 \text{ وبحل المعادلة الناتجة استنتج جذور المعادلة}$$

الأصلية.

٦- أوجد المعادلة التي تزيد جذورها بمقدار 1 عن جذور المعادلة

$$x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24 = 0 \text{ وبحل المعادلة الناتجة استنتج}$$

جذور المعادلة الأصلية.

٧- كون المعادلة التي جذورها مقلوب جذور المعادلة

$$x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0$$

٨- إذا كان  $1-i$  جذرا من جذور المعادلة

$$x^4 - 5x^2 + 10x - 6 = 0 \text{ فأوجد باقي الجذور.}$$

٩- إذا كان 0,1,2 جذورا لمعادلة ما فما هي تلك المعادلة؟

١٠- أوجد باقي القسمة عند قسمة كثيرة الحدود

$$x^4 - 4x^3 + 16x^2 - 63x + 242 = 0 \text{ على } x=3$$

١١- حل المعادلة  $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 5 = 0$  إذا علم أن  $i$

أحد جذورها.

$$x^3 - 9x^2 + 33x - 65 = 0 \quad \text{١٢- حل المعادلة}$$

١٣- حل المعادلات:

$$(i) \quad x^3 + 8x^2 = 0$$

$$(ii) \quad x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$(iii) \quad x^3 - 15x - 126 = 0$$

$$(iv) \quad x^3 - 6x - 9 = 0$$

$$(v) \quad x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

## الباب الثالث

### المحددات Determinants

من الأمور التي تساعد كثيراً في تقديم نظريات رياضية جديدة استخدام رموز معبرة يمكن من خلالها استيعاب عدد كبير من التعبيرات الرياضية وإذا كان اختيار الرمز مناسب فإنه يساعد في تعميم بعض النظريات إلى مستويات أعلى دون إدخال رموز جديدة . وتعتبر المحددات من أمثلة تلك الرموز التي ساعدت كثيراً في تطوير علم الجبر الخطي فقد اتفق على إستبدال المقدار الجبري

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 \text{ بالرمز } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

وإن كان هذا لا يبدو تبسيطاً على هذا المستوى فالنظر إلى إستبدال المقدار الجبري

$$a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ بالرمز}$$

ولا شك أن الرمز الأخير أسهل للذاكرة من المطول . حيث تكثر الإشارات وتتعدد التوليفات من الحروف  $a, b, c$  وبصفة عامة فإن المحددة عبارة عن رمز بسيط يتكون من مجموعة من الأعداد موضوعة على شكل عدد من الصفوف وعدد مساو له من الأعمدة ويحدهما خطان رأسيان . ويسمى عدد الصفوف التي تكون المحددة برتبة المحددة  $t$  Order of the determinant .

ولكن فيما عدا المحددات من الرتبة الثانية فإننا لم نذكر كيف يمكن أن نستدل على المقدار الجبرى الذى يرمز له المحدد.

المحددات من الرتبة الأولى يرمز لها بـ  $|a|$  وهى تعطى القيمة  $a$  ويجب أن نحذر هنا من الخلط بين رمز المحدد ورمز القيمة المطلقة فالمحدد  $|3|$  تساوى القيمة 3 وكذلك المحدد  $|-5|$  تساوى القيمة 5- أما بالنسبة للمحددات من الرتبة الثانية فإن قيمتها تساوى

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 2(-4) - (-1)(1) = -7 \quad \text{وبالتالى فإن}$$

فإذا ما إنتهينا من توضيح كيفية حساب قيمة المحددة من الرتبة الثانية أمكن تعريف كيفية حساب قيمة المحددات من الرتبة الثالثة. لحساب قيمة محددة من رتبة أعلى من الثانية يجب تعريف المحيد و المعامل المرافق لعناصر المحدد. نلاحظ أن الرمز  $a_{ij}$  يرمز إلى العنصر الموجود بالصف رقم  $i$  والعمود رقم  $j$ . وأن إشارة هذا العنصر هى  $(-1)^{i+j}$ .

**محيد (مصفى) العنصر  $a_{ij}$  Minor**

لكل عنصر من عناصر المحدد يوجد محيد (Minor) ونرمز له بالرمز  $M_{ij}$  وهو المحدد الناتج عن حذف عناصر الصف رقم  $i$  والعمود رقم  $j$  من المحدد الأصلية مع الاحتفاظ بالعناصر الأخرى. وتكون رتبة المحيد أقل من رتبة المحدد الأصلية برتبة واحدة.

فعلى سبيل المثال إذا كان لدينا المحدد

$$M_{12} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{فإن المحدد}$$

هو  $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}$  والمحدد  $M_{22}$  هو  $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}$

المعامل المرافق للعنصر  $a_{ij}$  : Cofactor

لكل عنصر من عناصر المحدد يوجد معامل مرافق  $f_{ij}$  (أو  $A_{ij}$ ) وهو العدد الناتج عن ضرب محدد العنصر  $M_{ij}$  فى إشارته  $(-1)^{i+j}$ ، أى أن

$$f_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

فعلى سبيل المثال إذا كان لدينا المحدد السابق فإن

$$f_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$f_{32} = (-1)^{2+3} M_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -10$$

وعلى هذا فإذا كان معنا محدد من الرتبة الثالثة

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

فإن

$$f_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad f_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$f_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad f_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$f_{22}=(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad f_{23}=(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$f_{31}=(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad f_{32}=(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix},$$

$$f_{33}=(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

وهكذا، الآن يمكننا أن نضع تعريفاً لكيفية حساب المحدد. وذلك باستخدام أى صف أو عمود من المحدد. وهو ما نحصل عليه بجمع حواصل ضرب كل عنصر من عناصر الصف أو العمود فى معامل المرافق وهذه العملية تسمى بفك المحدد expansion of the determinant بواسطة أى من الصفوف أو الأعمدة.

فعلى سبيل المثال.

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} f_{11} + a_{12} f_{12} + a_{13} f_{13}.$$

وتفصيلاً نكتب قيمة محدد من الرتبة الثالثة كالاتى

$$|A| = (-1)^2 a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^3 a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^4 a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22} a_{33} - a_{32} a_{23}) - a_{12}(a_{21} a_{33} - a_{31} a_{23}) + a_{13}(a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22})$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{مثال (١): أوجد قيمة المحددة}$$

الحل: باستخدام عناصر الصف الأول

$$|A| = a_{11} f_{11} + a_{12} f_{12} + a_{13} f_{13}$$

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 2(-1) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (-5 - 8) - 2(10 + 2) + 3(8 - 1) = -16$$

وفي حالة محدد من الرتبة الرابعة فإن

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^2 a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^3 a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^4 a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^5 a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

وهكذا بالنسبة لحساب قيمة المحددات من رتبة أعلى.

خواص المحددات:

سنبحث بعض خواص المحددات والتي تسهل حساب قيم المحددات.

١- لا تتغير قيمة المحدد إذا ما جعلنا جميع الصفوف أعمدة وجميع الأعمدة صفوف وب نفس الترتيب، ويسمى تدوير المحدد (أى أن الصف الأول يصبح العمود الأول وهكذا).

٢- إذا كانت جميع عناصر صف ما (أو عمود) أصفار فإن قيمة المحدد تتلعم.

٣- تتغير إشارة المحدد بتبديل صفين (أو عمودين).

٤- تنعدم قيمة المحدد إذا تساوت جميع العناصر المتناظرة في صفين (أو عمودين).

وكذلك إذا كان أحد الصفوف (الأعمدة) يساوى صف (عمود) آخر مضروباً في ثابت (أى يوجد تناسب بينهما) فإن قيمة المحدد تتلاشى.

٥- عند ضرب محددة في مقدار فإن المقدار يضرب في أحد الصفوف أو الأعمدة، وكذلك يمكن أخذ عامل مشترك من عناصر أحد الصفوف أو الأعمدة، مع الأخذ في الاعتبار أنه يمكن أخذ عوامل من أكثر من صف أو عمود.

٦- إذا تكونت عناصر صف (أو عمود) في محدد ما من مجموع جبرى لكميات عددها  $k$  فإن المحدد يساوى نفس المجموع الجبرى لمحددات آخريات عددها  $k$  تتفق فيما بينها وبين المحدد الأصلي فيما عدا عناصر الصف أو العمود محل الاعتبار فإن عناصره توزع على المحددات المختلفة حسب الصورة. فمثلاً

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11}-c_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21}-c_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31}-c_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{21} & a_{22} & a_{23} \\ c_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

٧- فى أى محدد إذا أضفنا لعناصر صف (عمود) أحد العناصر المناظرة فى أى صف (عمود) آخر مضروبة فى مقدار ما فإن قيمة المحدد لا تتغير.

ويمكن استخدام هذه الخاصية لجعل قيم بعض عناصر المحددة أصفار مما يسهل حساب قيمة المحدد. وكذلك تستخدم هذه الخاصية للحصول على ما يسمى بالصيغة المثلية العليا للمحدد upper triangular form والتي تكون كل العناصر أسفل القطر الرئيسي أصفار ( $a_{ij}=0 \forall i > j$ ) حيث يمكن استخدام الصف الأول لتصفير عناصر العمود الأول أسفل العنصر  $a_{11}$  (وذلك بضرب الصف الأول في العدد الذي يعطى  $-a_{21}$  ثم نجمع ناتج ضرب الصف الأول مع الصف الثانى ويحل الناتج مكان الصف الثانى). بنفس الفكرة نستخدم الصف الثانى فى المحدد الجديد لتصفير عناصر العمود الثانى أسفل القطر الرئيسى، وهكذا نستخدم الصف رقم  $p$  لتصفير عناصر العمود رقم  $p$  أسفل القطر الرئيسى حتى نحصل على الصورة المثلية العليا للمحدد. وكذلك يمكن الحصول على صيغة مثلية سفلى للمحدد lower triangular form والتي فيها العناصر أعلى القطر الرئيسى أصفار ( $a_{ij}=0 \forall i < j$ ). حيث يمكن استخدام العمود الأول لتصفير عناصر الصف الأول بداية من العمود الثانى. ثم نستخدم العمود الثانى لتصفير عناصر الصف الثانى بداية من العمود الثالث، وهكذا نستخدم العمود رقم  $p$  لتصفير عناصر الصف رقم  $p$  بداية من العمود رقم  $p+1$  حتى نحصل على الصيغة المثلية السفلى للمحدد.

**ملاحظة 1:** عند الحصول على أى من الصيغتين المثلثتين إذا حصلنا فى إحدى الخطوات على عمود أو صف جميع عناصره أصفار نتوقف وتكون قيمة المحدد عندئذ تساوى الصفر.

**ملاحظة ٢:** عند الحصول على أى من الصيغتين المثلثتين إذا كان عند استخدام الصف (العمود) رقم  $p$  كان العنصر  $a_{pp}$  يساوى الصفر نبذل هذا الصف (العمود) مع أحد الصفوف (الأعمدة) التى تلية والتي يكون فيها العنصر الذى سيحل مكان  $a_{pp}$  لايساوى الصفر، ثم نقوم بعمل

تبديل آخر لصفين (عمودين) بعد الصف (العمود) المستخدم حتى لا نغير في قيمة المحددة. تكون قيمة المحددة عبارة عن حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي (وهذه الصيغة هي المستخدمة لإيجاد قيمة المحددات باستخدام لغات البرمجة في الحاسب الآلي).

$$\text{مثال (٢): أوجد قيمة المحدد } |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل: نستخدم الخاصية (٦) للوصول إلى محدد تكثر فيها العناصر الصفرية لأن ذلك يسهل في عمليات الضرب .

أولاً: بضرب الصف الأول في 3- وإضافة الناتج إلى الصف الثاني وكذلك ضرب الصف الأول في 6- وإضافة الناتج إلى الصف الثالث نحصل على :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 7 & -12 \\ 0 & 16 & -27 \end{vmatrix} = -7 \times 27 + 12 \times 16 = 3$$

مثال (٣): أوجد الصيغة المثلثية العليا للمحدد الآتي ثم أوجد قيمة المحدد

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 8 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

الحل: نستخدم الخاصية (٦) للحصول على الصيغة المثلثية العليا كما يلي:

أولاً: بضرب الصف الأول في 1/2- وإضافة الناتج إلى الصف الثاني، وضرب الصف الأول في 3/2- وإضافة الناتج إلى الصف الثالث، ثم بضرب الصف الأول في 5/2- وإضافة الناتج إلى الصف الرابع نجد أن :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5/2 & 7/2 & 6 \\ 0 & -7/2 & -3/2 & 3 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 6 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & -7 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

ثانياً: بضرب الصف الثاني في  $7/5$  وإضافة الناتج إلى الصف الثالث، وضرب الصف الثاني في  $-1/5$  وإضافة الناتج إلى الصف الرابع نحصل على:

$$|A| = \frac{3}{4} \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 34/5 & 19/5 \\ 0 & 0 & -12/5 & 8/5 \end{vmatrix} = \frac{12}{100} \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 34 & 19 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

ثالثاً: بضرب الصف الثالث في  $3/34$  وإضافة الناتج إلى الصف الرابع نحصل على الصيغة المثلثية العليا للمحدد كالآتي:

$$|A| = \frac{12}{100} \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 34 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 125/34 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 34 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 1/34 \end{vmatrix}$$

وتكون قيمة المحددة  $|A| = 15 \times 2 \times 5 \times 34/34 = 150$

مثال (٤): أوجد الصيغة المثلثية السفلى للمحدد بالمثل السابق ثم أوجد قيمته.

الحل: نستخدم الخاصية (٦) للحصول على الصيغة المثلثية السفلى كما يلي:

أولاً: بضرب العمود الأول في  $-3/2$  وإضافة الناتج إلى العمود الثاني، وضرب العمود الأول في  $-1/2$  وإضافة الناتج إلى العمود الثالث نحصل على:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5/2 & 7/2 & 6 \\ 3 & -7/2 & -3/2 & 3 \\ 5 & 1/2 & -1/2 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 6 \\ 3 & -7 & -3 & 3 \\ 5 & 1 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

ثانياً: بضرب العمود الثاني في  $-7/5$  وإضافة الناتج إلى العمود الثالث،  
وبضرب العمود الثاني في  $-6/5$  وإضافة الناتج إلى العمود الرابع نحصل على:

$$|A| = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 34/5 & 57/5 \\ 5 & 1 & -12/5 & 24/5 \end{vmatrix} = \frac{12}{100} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 34 & 57 \\ 5 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

ثالثاً: بضرب العمود الثالث في  $-57/34$  وإضافة الناتج إلى العمود الرابع  
نحصل على الصيغة المتثلثة العليا للمحدد كالآتي:

$$|A| = \frac{12}{100} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 34 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 125/34 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 34 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 1/34 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 15 \times 2 \times 5 \times 34/34 = 150 \quad \text{وتكون قيمة المحددة}$$

استخدام المعادلات في حل المعادلات الخطية: قاعدة كرامر Cramer's rule

نفرض أن لدينا  $n$  من المعادلات الخطية كل منها تحتوي على  $n$  من المجاهيل  
 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  على الصورة:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n = b_n$$

فإنه يمكن إيجاد الحل على الصورة

$$x_k = \frac{\Delta_{x_k}}{\Delta}, \quad k=1,2,3,\dots,n \quad \text{provided that } \Delta \neq 0$$

حيث  $\Delta$  هي محددة المعاملات ويحتوى العمود رقم  $k$  على معاملات المجهول  $x_k$  المعاملات،  $a_{1k}, a_{2k}, a_{3k}, \dots, a_{nk}$  ونحصل على  $\Delta_{x_k}$  من محددة المعاملات  $\Delta$  باستبدال العمود المحتوى على معاملات  $x_k$  بالحدود المطلقة للمعادلات.

مثال (٥): باستخدام المحددات أوجد حل المعادلتين:

$$x+y=3, \quad 4x-y=2$$

الحل: نوجد المحددات  $\Delta, \Delta_x, \Delta_y$  كما يلي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-10}{-5} = 2.$$

مثال (٦): باستخدام المحددات أوجد حل المعادلات:

$$x+y-z=4, \quad 5x-4z=9, \quad 3x+4y+z=6$$

الحل: نوجد المحددات  $\Delta, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$  كما يلي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -21, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 9 & 0 & -4 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 9 & -4 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -38, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 9 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 41$$

$$\Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{5}{21}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{38}{21}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-41}{21}$$

مثال (٧): باستخدام المحددات أوجد حل المعادلات:

$$x + 2z = 1, \quad 3x - y + z = 2, \quad 4y + 5z = -1$$

الحل: نجد المحددات  $\Delta, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$  كما يلي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 15, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 5,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -10 \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -\frac{2}{3}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{1}{3}$$

## تمارين

١- أوجد قيمة المحددات الآتية:

$$(i) |A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}, (ii) |A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}, (iii) |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

٢- أوجد الصيغة المثلثية السفلى والعليا للمحددات الآتية، ثم أوجد قيمة كل منها:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}, |B| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix}, |C| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$٣- بدون فك المحدد أوجد قيمة  $r = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -7 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$  الجواب  $r = 25$$$

$$٤- باستخدام خواص المحددات أوجد قيمة  $\begin{vmatrix} 935 & 936 \\ 937 & 938 \end{vmatrix}$  الجواب  $-2$$$

٥- أثبت أن  $x=3$  هي أحد جذور المعادلة

$$\begin{vmatrix} x & -6 & 1 \\ 3 & -2x & x-2 \\ -2 & 3x & x+3 \end{vmatrix} = 0$$

بوضع  $x=3$  تتطابق عناصر الصفين الأول والثاني

٦- بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

٧- أثبت أن  $|A| = \begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{vmatrix} = 0$  مهما كانت قيم  $\alpha, \beta, \gamma$  بضرب كل

من الصفوف الثلاثة في  $-1 \Rightarrow |A| = -|A| \Rightarrow 0$

٨- بدون فك المحددات أثبت أن

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ -2 & -5 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 3 & 7 \\ -2 & 10 & 5 \\ 2 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 5 \\ 2 & x+2 & 5 \\ 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{أوجد مجموعة الحل للمعادلة}$$

١٠- باستخدام المحددات أوجد حل المعادلات الآتية:

i)  $3x+2y+8z=38, \quad x+3y+9z=37, \quad 2x+y+z=15$

ii)  $x+2y+2z=6, \quad 2x+4y+z=7, \quad 3x+2y+9z=14$

iii)  $4x+2y-z=5, \quad 3x-y+z=-2, \quad x+y-z=0$

لقد إزدادت أهمية المصفوفات لحاجة الإنسان إلى عرض وتبويب البيانات وتخزين المعلومات وكذلك للتعامل مع تلك البيانات في صورة جداول وأن تنظيم المعلومات بصورة معينة تسهل سرعة التذكر والمقارنة بينها. ولقد زادت أهمية المصفوفات مع استعمال الحاسوب وقدرته على إجراء عمليات حسابية طويلة في وقت قصير. ولا يقتصر دور المصفوفات الهام على علم الرياضيات فقط، بل تلعب دوراً كبيراً في العلوم الأخرى كالفيزياء والكيمياء وغيرها.

**تعريف المصفوفة:** المصفوفة هي منظومة من العناصر مرتبة في صورة صفوف وأعمدة. الأعداد التي تكون المصفوفة تسمى بعناصر المصفوفة وهذه العناصر تكتب داخل قوسين على الشكل ( ) أو الشكل [ ]. أى أن المصفوفة عبارة عن رمز بالشكل الآتى وتحتوى على عناصر موضوعة في صفوف و أعمدة كالآتى.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

حيث يرمز لعناصر المصفوفة  $A$  بـ  $a_{ij}$ . ويدل الرمز  $i$  فى العنصر  $a_{ij}$  على رقم الصف والرمز الثانى  $j$  على رقم العمود والذى يقع العنصر فيها. وللإختصار يمكن الرمز للمصفوفة بالرمز  $[a_{ij}]$ . وتسمى المصفوفة التي تحتوى على  $m$  من الصفوف و  $n$  من الأعمدة بالمصفوفة  $m \times n$  وتقرأ  $m$  فى  $n$ . وهنا نذكر أنواع مختلفة من المصفوفات:

المصفوفة الصفرية: Null matrix تسمى المصفوفة  $A$  بالمصفوفة الصفرية إذا كانت جميع عناصرها أصفار، ويرمز لها بالرمز  $[0]$ . أى أن:

$$[0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المربعة Square matrix: إذا كان عدد الصفوف يساوى عدد الأعمدة ( $m=n$ ) فإن المصفوفة تسمى مصفوفة مربعة. ويسمى القطر الذى يحتوى على العناصر  $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$  بالقطر الرئيسى أو الأساسى، كما يسمى مجموعها أثر المصفوفة  $A$  (Trace of  $A$ ) ويرمز له بالرمز  $\text{Tr } A$ . أى أن

$$\text{Tr } A = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

المصفوفة القطرية Diagonal matrix: إذا انعدمت جميع عناصر المصفوفة المربعة عدا عناصر القطر الرئيسى تسمى بالمصفوفة القطرية. أى أن  $a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$ .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

وإذا تساوت عناصرها القطرية تسمى بالقياسية.

مصفوفة الوحدة Identity matrix : تسمى المصفوفة القطرية بمصفوفة الوحدة إذا كان كل عنصر من عناصر قطرها الرئيسي مساوياً الواحد الصحيح ويرمز لها بالرمز  $I$ . أى أن :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المثلثية العليا Upper triangular matrix : هي المصفوفة المربعة

والتي فيها العناصر أسفل القطر الرئيسي أصفار. أى أن :  $a_{ij}=0 \quad \forall i > j$

المصفوفة المثلثية السفلى Lower triangular matrix : هي المصفوفة

المربعة والتي فيها العناصر أعلى القطر الرئيسي أصفار. أى أن

$$a_{ij}=0 \quad \forall i < j:$$

مصفوفة الصف row matrix : إذا كانت المصفوفة تحتوى على صف واحد

$$A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$$

مصفوفة عمود Column matrix : إذا كانت المصفوفة تحتوى على عمود

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

واحد تسمى بالمصفوفة العمودية، أى أن

مصفوفة العنصر Element matrix : هي مصفوفة تحتوى على عنصر واحد

$$A = [a]$$

المصفوفات المتماثلة Symmetric matrix: إذا حققت عناصر المصفوفة المربعة  $A=[a_{ij}]$  العلاقة  $a_{ij}=a_{ji}$  لكل  $i, j$  تسمى مصفوفة متماثلة. أما إذا كانت  $a_{ij}=-a_{ji} \forall i, j$  فإن  $A$  تسمى مصفوفة شبة متماثلة.

مثال (١): المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 6 \end{bmatrix}$$

متماثلة

بينما المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

غير متماثلة.

### خواص المصفوفات:

(١) - التساوي: يقال أن المصفوفتين  $A=[a_{ij}]$  و  $B=[b_{ij}]$  متساويتان إذا وفقط إذا كانتا تحتويان على نفس العدد من الأعمدة والصفوف وكان كل

عنصر في إحداها مساوياً لنظيره في الثانية: أى أن  $a_{ij}=b_{ij} \forall i, j$

مثال (٢): أوجد قيم  $x, y$  إذا علم أن

$$\begin{bmatrix} 1-2x & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-2 & 1 \\ 0 & y^2-1 \end{bmatrix}$$

الحل: من شروط تساوي مصفوفتين نجد أن

$$x-2=1-2x \Rightarrow x=1, \quad y^2-1=3 \Rightarrow y=\pm 2.$$

(٢) - الضرب في مقدار  $k$ : إذا كان  $k$  مقداراً عددياً فإن حاصل ضرب  $k$  في

المصفوفة  $A=[a_{ij}]$  (يسمى الضرب القياسي) يكتب على

الصورة  $kA=[ka_{ij}]$ ، أى أن كل عنصر من عناصر المصفوفة  $A$

يجب أن يضرب في  $k$ . مثال لذلك :

$$\text{If } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow kA = \begin{bmatrix} k & 2k & -3k \\ 5k & 0 & 2k \\ k & -k & k \end{bmatrix}$$

(٣) - مدور المصفوفة Transpose of a matrix : مدور (منقول) المصفوفة

$A$  يرمز له بالرمز  $A^T$  أو  $A'$  وهو ناتج من تبديل الأعمدة

والصفوف في المصفوفة  $A$  وبنفس الترتيب. أى أنه إذا كانت

$$A = [a_{ij}] \text{ فإن } A^T = [a_{ji}]$$

$$\text{مثال (٣): إذا كانت } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ فإن } A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

نظرية: يحقق مدور المصفوفة للخواص الآتية :

$$(i) (A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(ii) (A^T)^T = A$$

$$(iii) (AB)^T = B^T A^T$$

$$(iv) (\kappa A)^T = \kappa A^T$$

حيث  $k$  مقدار ثابت.

(٤) - جمع المصفوفتين: إذا كانت  $A = [a_{ij}]$  و  $B = [b_{ij}]$  مصفوفتين  $m \times n$

فإن المجموع  $C = A \pm B$  يعطى مصفوفة  $m \times n$  وتعرف بالمصفوفة

$$[c_{ij}] = [a_{ij}] \pm [b_{ij}] \quad \forall i, j$$

أى نجمع (نطرح) العناصر المتناظرة.

مثال (٤): إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

فإن

$$A+B = \begin{bmatrix} 2+3 & 3+0 & 0+0 \\ -1+2 & 4+0 & 0-1 \\ 3+4 & 2+2 & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A-B = \begin{bmatrix} 2-3 & 3-0 & 0-0 \\ -1-2 & 4-0 & 0+1 \\ 3-4 & 2-2 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال (٥): إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

فأوجد  $A+B, A-C, -2A, A+(B-C)$

الحل:

$$A-C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, A+B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$-2A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 6 \\ -10 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}, A+(B-C) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 9 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

تعريف: المصفوفة  $A$  - تسمى سالب المصفوفة  $A$  وينتج عن طريق ضرب كل عنصر من عناصر  $A$  في  $-1$ .

(٥) - ضرب مصفوفتين: إذا كانت المصفوفة  $A = [a_{ij}]$  مصفوفة  $m \times p$

وكانت المصفوفة  $B = [b_{ij}]$  مصفوفة  $p \times n$ , أي أن عدد أعمدة

المصفوفة  $A$  يساوي عدد صفوف المصفوفة  $B$  وتستطيع إجراء عملية

الضرب  $C = AB$  ونقول أن الضرب  $AB$  معرف ويكون حاصل

الضرب مصفوفة  $m \times n$ . ويتكون حاصل الضرب  $C = AB$  بضرب

كل صف من  $A$  مرة واحدة فقط في كل عمود من أعمدة  $B$ .

(لاحظ) أن ضرب صف من  $A$  في عمود من  $B$  ينتج عنصر واحد في مصفوفة

حاصل الضرب  $C = AB$

وقد يحدث أن يكون  $AB$  معرّفاً ولكن  $BA$  غير معرّف، أيضاً قد يحدث أن يكون حاصل الضرب  $BA$ ،  $AB$  معرّفين ولكن عموماً  $BA \neq AB$  أى أن عملية الضرب ليست إبدالية.

نظرية: ضرب المصفوفات يحقق الخواص الآتية:

$$(i) A(BC) = (AB)C \quad (ii) A(B+C) = AB + AC$$

$$(iii) (B+C)A = BA + CA \quad (iv) k(AB) = (kA)B = A(kB)$$

$$(v) A^2 = A \times A, A^3 = A \times A^2, \dots$$

والخاصية الأخيرة تتحقق للمصفوفات المربعة فقط.

مثال (٦): ضرب المصفوفتين

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} [2 \ 3 \ 4] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 9 & 12 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$BA = [2 \ 3 \ 4] \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = [2 \times 1 + 3 \times 3 + 4 \times 2] = [19]$$

واضح من هذا المثال أنه بالرغم من وجود كلا من  $AB$ ،  $BA$  إلا أن  $AB \neq BA$ .

مثال (٧): ضرب المصفوفتين

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 19 & 22 \\ 18 & 20 & 14 \end{bmatrix}$$

أما الضرب  $BA$  غير جائز

٦- محدد المصفوفة **Determinat of matrix**: محدد المصفوفة المربعة  $A$

هو محدد عناصره هي عناصر المصفوفة بنفس الترتيب. ويرمز له

بالرمز  $|A|$  أو  $\det A$ . إذا كان  $|A|=0$  يقال أن المصفوفة شاذة

. Singular

وإذا كان  $|A| \neq 0$  يقال أن المصفوفة غير شاذة non - singular.

٧- مصفوفة المرافقات (المعاملات المرافقة)  $F$ : مصفوفة المرافقات

للمصفوفة المربعة  $A$  هي مصفوفة عناصرها عبارة عن المعاملات

المرافقة لعناصر المحددة  $|A|$ . أي أن  $F=[f_{ij}]$ . مثال لذلك إذا

كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

فإن المعاملات المرافقة لعناصر محدد المصفوفة هي:

$$f_{1,1} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -14, \quad f_{1,2} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 8,$$

$$f_{1,3} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad f_{2,1} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -18$$

$$f_{2,2} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6, \quad f_{2,3} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

$$f_{3,1} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15, \quad f_{3,2} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -5,$$

$$f_{3,3} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$F = \begin{bmatrix} -14 & 8 & 4 \\ -18 & 6 & 8 \\ 15 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

(٨) - المصفوفات القابلة للعكس (معكوس المصفوفة) Inverse of a matrix

المصفوفة المربعة A يقال أنها قابلة للعكس (لها معكوس) إذا وجدت

مصفوفة B بحيث أن  $AB=BA=I$  حيث I هي مصفوفة

الوحدة. ولذلك سوف تسمى المصفوفة B بمعكوس المصفوفة A

ونرمز لها بالرمز  $A^{-1}=B$ .

فإذا وجد المعكوس  $A^{-1}$  فإنه يلعب دوراً مشابهاً للدور الذي يلعبه

مقلوب أى عدد فى الجبر العادى ولتوضيح فكرة المعكوس نفترض أن لدينا

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB=BA=I \quad \text{أى أن}$$

ومن التعريف السابق لمعكوس المصفوفة يمكن القول أن  $A^{-1}=B$  ويجب أن تعرف أنه

إذا كان لأى مصفوفة معكوس فإن هذا المعكوس يكون وحيداً.

والآن سوف نعرض طريقة إيجاد المعكوس للمصفوفة باستخدام محدداتها ومصفوفة مرافقاتها المحورة (المدورة).

إذا كان لدينا المصفوفة  $A$  فإن خطوات إيجاد معكوسها تلخص فى الآتى.

١- إيجاد قيمة محدد المصفوفة  $|A|$  ويجب أن لا يساوى الصفر حتى يوجد المعكوس. أى أن المصفوفة الشاذة لا يوجد لها معكوس.

٢- إيجاد مصفوفة المرافقات  $F$  والتي تحتوى على المرافقات المناظرة لكل عناصر المصفوفة.

٣- إيجاد مدور مصفوفة المرافقات  $F^T$  وتسمى بالمصفوفة المرافقة adjoint matrix ونرمز لها بالرمز  $\text{adj } A = F^T = F'$ .

٤- إيجاد معكوس المصفوفة  $A$  باستخدام العلاقة:  $A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} = \frac{F^T}{|A|}$ .

يجب ملاحظة أن عملية ضرب مصفوفة فى معكوسها عملية إبدالية وتعطى مصفوفة الوحدة، أى أن  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ . وهذه العلاقة يمكن إستخدامها للتأكد من صحة المعكوس.

$$\text{مثال (٨): أوجد معكوس المصفوفة } A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل: حدد المصفوفة  $\det A$

$$\det A = |A| = 4 \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$$

$$F = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

وبعد إجراء العمليات الحسابية نجد أن

$$F = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -12 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -8 & 24 \end{bmatrix} \Rightarrow F^T = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -8 \\ -12 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

وفي النهاية يمكن أن نحصل على معكوس المصفوفة كالآتي :

$$A^{-1} = \frac{adj A}{|A|} = \frac{F^T}{|A|} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -8 \\ -12 & 0 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ويمكن التأكد من ذلك بالحصول على  $AA^{-1}$  فنجد أن

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 4 \\ 9 & 2 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{مثال (٩): أوجد معكوس المصفوفة}$$

الحل: محدد المصفوفة  $\det A$

$$\det A = 4 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} = -17 \neq 0$$

مصفوفة المعاملات المرافقة

$$F = \begin{bmatrix} 22 & -6 & -31 \\ -6 & -3 & 10 \\ -7 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

ندور مصفوفة المعاملات المرافقة فنحصل على المصفوفة  $\text{adj } A = F^T$  ومن ثم نجد أن

$$A^{-1} = \frac{F^T}{|A|} = -\frac{1}{17} \begin{bmatrix} 22 & -6 & -7 \\ -6 & -3 & 5 \\ -31 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

إستخدام المصفوفات في حل المعادلات الخطية:

إذا كان لدينا  $n$  من المعادلات الخطية سابقة الذكر فإنه يمكننا كتابة هذه

المعادلات على الشكل المصفوفي  $AX=B$  حيث :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

وتسمى  $A$  بمصفوفة المعاملات،  $X$  مصفوفة المجاهيل و  $B$  مصفوفة

الحدود المطلق. وباستخدام جبر المصفوفات يمكن حل معادلة المصفوفات

السابق ذكرها. وذلك بضرب طرفي المعادلة  $AX=B$  في المعكوس  $A^{-1}$

فنحصل على:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

ولحل المعادلات الخطية فإنه يجب الحصول أولاً على  $A^{-1}$  ثم ضربها في  $B$ .  
مثال (١٠): حل المعادلات الخطية التالية باستخدام المصفوفات.

$$x_1 + 2x_3 = 4, \quad x_1 + x_2 = 5, \quad 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 2$$

الحل: من المعادلات المعطاة نجد أن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

نحصل أولاً على المعكوس  $A^{-1}$

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

نوجد مصفوفة المعاملات المرافقة

$$F = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 6 & -7 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow F^T = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -1 & -7 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{adjA}{|A|} = \frac{F^T}{|A|} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -1 & -7 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

وفي النهاية نحصل على المجاهيل كما يلي:  $X = A^{-1}B$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -6 & 2 \\ 1 & 7 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 \\ 35 \\ 17 \end{bmatrix}$$

ويكون

$$x_1 = -30, \quad x_2 = 35, \quad x_3 = 17$$

مثال (١١): حل المعادلات الخطية الآتية باستخدام المصفوفات.

$$x_1 + 2x_3 = 1$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

$$4x_2 + 5x_3 = -1$$

الحل: من المعادلات المعطاة نجد أن مصفوفة المعاملات هي

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

نحصل على  $A^{-1}$  من العلاقة

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -9 - 0 + 24 = 15 \neq 0$$

بحساب مصفوفة المعاملات المرافقة نجد أن

$$F = \begin{bmatrix} -9 & -15 & 12 \\ 8 & 5 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow F^T = \begin{bmatrix} -9 & 8 & 2 \\ -15 & 5 & 5 \\ 12 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{F^T}{|A|} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} -9 & 8 & 2 \\ -15 & 5 & 5 \\ 12 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

وفي النهاية للحصول على المجاهيل .

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} -9 & 8 & 2 \\ -15 & 5 & 5 \\ 12 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 1/3, \quad x_2 = -2/3, \quad x_3 = 1/3$$

### تمارين

(١) أوجد  $2A + 3B$ ,  $A - B$  إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(٢) أوجد حاصل ضرب المصفوفات الآتية:

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad (ii) \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(iii) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(iv) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(٣) إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

فأوجد  $A(B+C)$ ,  $ABC$ ,  $A^3$

$$(٤) \text{ إذا كانت } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 7 & 5 & 4 \\ 8 & 9 & 12 \end{bmatrix} \text{ فاكتب } A \text{ على صورة مجموع مصفوفتين}$$

أحدهما متماثلة والآخرى شبه متماثلة.

$$(٥) \text{ إذا كان } A = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \text{ فاثبت أن } AA^T = A^T A = I_2 \text{ حيث } I_2$$

مصفوفة الوحدة من الدرجة الثانية.

$$\begin{bmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \tan x & \sec x & 1 \end{bmatrix} \quad (٦) \text{ أوجد قيمة } x \text{ التي تجعل المصفوفة الآتية منفردة}$$

$$(٧) \text{ حل المعادلة المصفوفية } 3 \left[ X + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \right] = 2 \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

٨) أوجد معكوس المصفوفات الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ثم تأكد من صحة الحل بتحقيق العلاقة  $AA^{-1} = I$ .

٩) باستخدام التحويلات الأولية أوجد معكوس المصفوفات الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

١٠) باستخدام المصفوفات أوجد حل المعادلات الآتية :-

(i)  $4x + 2y - z = 5, \quad 3x - y - z = -2, \quad x + y - z = 0$

(ii)  $x + y + z = 1, \quad 2x + 2y + z = 7, \quad x - 5y + 3z = 3$



## الجزء الرابع: الهندسة التحليلية

### ANALYTICAL GEOMETRY

- الباب الأول تغيير محوري الاحداثيات

#### القطاعات المخروطية

- الباب الثانى القطع المكافئ.

- الباب الثالث القطع الناقص

- الباب الرابع القطع الزائد



## الباب الأول

### تغيير محوري الإحداثيات

نتوقف صورة معادلة منحنى ما على وضع المحورين فى المستوى،  
فمثلا معادلة الدائرة التى مركزها النقطة  $(x_0, y_0)$  ونصف قطرها  $a$  تأخذ  
الصورة

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = a^2$$

فى حين أنه لو كان المحوران متقاطعين عند مركز هذه الدائرة لأخذت  
معادلتها الصورة البسيطة

$$x^2 + y^2 = a^2$$

وعلى ذلك فكثير من الحلول تكون أكثر سهولة بتغيير محورى  
الإحداثيات إلى أوضاع مناسبة ويمكن إتمام ذلك بنقل نقطة الأصل مع بقاء  
المحورين موازيين لوضعهما الأصلي أو بدورانهما زاوية معينة أو بإجراء  
العمليتين معا.

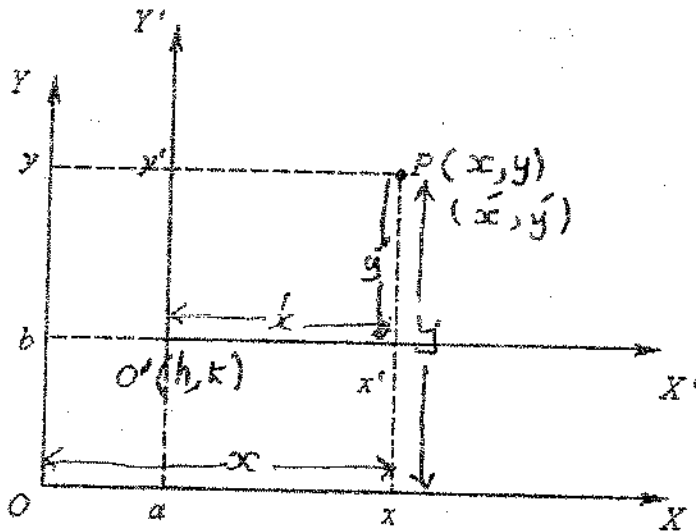
وسوفى نكتفى بدراسة نقل المحورين موازيين لوضعهما الأصلي  
ودوران المحورين بزاوية معينة حول محور عمودى على مستوييهما ومارا بنقطة  
الأصل.

**أولا: نقل المحورين "نقل نقطة الأصل":**

نفرض أن إحداثى نقطة الأصل الجديدة بالنسبة للمحورين الأصليين هي  
 $o'(h, k)$  وإنا أخذنا عندها محورين متعامدين هما  $o'x', o'y'$  موازيين  
للمحورين  $ox, oy$  على الترتيب فإذا كانت  $p$  أى نقطة فى المستوى إحداثياتها  
بالنسبة للمحورين الأصليين  $(x, y)$  وبالنسبة للمحورين الجديدين  $(x', y')$  فمن  
الشكل نجد أن:

$$x = x' + h, \quad (1)$$

$$y = y' + k \quad (2)$$



### تأثير نقل المحورين على المعادلة العامة من الدرجة الثانية:

إذا اعتبرنا المعادلة

$$\phi(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad (3)$$

ونقلنا نقطة الأصل إلى النقطة  $(x_0, y_0)$  مع بقاء المحورين موازيين لوضعهما

الأصلي فإن المعادلة في صورتها الجديدة يمكن الحصول عليها بالتعويض من

المعادلتين (٢)، (١) في المعادلة (٣) فيكون

$$a(x' + x_0)^2 + 2h(x' + x_0)(y' + y_0) + b(y' + y_0)^2 + 2g(x' + x_0) + 2f(y' + y_0) + c = 0$$

ويتجميع حدود الدرجة الثانية في  $x', y'$  فحدود الدرجة الأولى فالحذ المطلق فإن:

$$ax'^2 + 2hx'y' + by'^2 + 2(ax_0 + hy_0 + g)x'$$

$$+ 2(hx_0 + by_0 + f)y' + (ax_0^2 + 2hx_0y_0 + by_0^2 + 2gx_0 + 2fy_0 + c) = 0$$

وهذه معادلة المنحنى بالنسبة للمحورين الجديدين ومنها نلاحظ أن:

(أ) معاملات حدود الدرجة الثانية لم تتغير.

(ب) كل التغير يحدث في معاملات الدرجة الأولى والحد المطلق.

مثال (١): أوجد المعادلة الجديدة للمنحنى

$$\phi(x, y) = x^2 + 10xy + y^2 - 6x + 18y - 7 = 0$$

عندما ينقل المحوران موازيين لوضعهما الأصلي للنقطة  $(-2, 1)$ .

الحل:

يمكن الحصول على المعادلة مباشرة بالتعويض بـ

$$x = x' - 2, \quad y = y' + 1$$

$$(x' - 2)^2 + 10(x' - 2)(y' + 1) + (y' + 1)^2 - 6(x' - 2) + 18(y' + 1) - 7 = 0$$

أى أن المعادلة الجديدة هي

$$x'^2 + 10x'y' + y'^2 + 8 = 0$$

مثال (٢): أ حذف حدود الدرجة الأولى من المعادلة

$$4x^2 + y^2 - 16x + 6y + 9 = 0$$

الحل:

$$y = v + k, \quad x = u + h$$

حيث  $(h, k)$  هي نقطة الأصل الجديدة  $0v, 0u$  هما محورى الاحداثيات الجديدة

وبالتعويض فى المعادلة يكون

$$4(u + h)^2 + (v + k)^2 - 16(u + h) + 6(v + k) + 9 = 0$$

$$4u^2 + v^2 + (8h - 16)u + (2k + 6)v$$

$$+ 4h^2 + k^2 - 16h + 6k + 9 = 0$$

ولجعل المعادلة خالية من حدود الدرجة الأولى نساوى معامل كل من  $u, v$

بالصفر.

$$8h - 16 = 0 \quad \Rightarrow h = 2$$

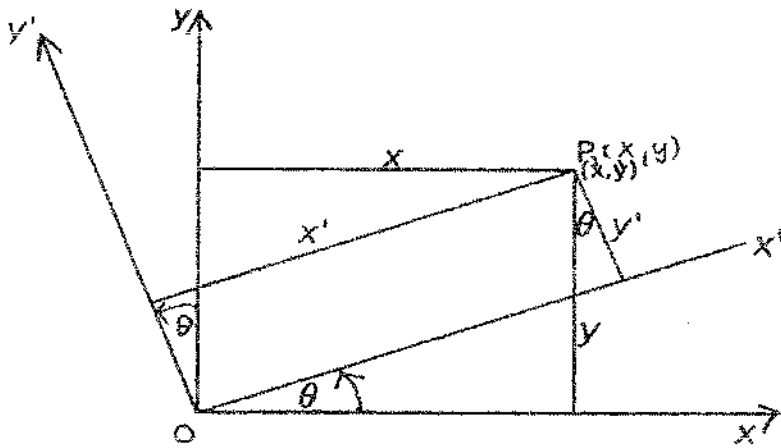
$$2k + 6 = 0 \quad \Rightarrow k = -3$$

أى أنه بنقل نقطة الأصل إلى النقطة  $(2, -3)$  تحذف حدود الدرجة الأولى وتؤول المعادلة إلى

$$4u^2 + v^2 = 16$$

### دوران المحاور:

نفرض أن اتجاهي المحورين  $x, y$  قد تغير إلى اتجاهين متعامدين أيضا كما هو مبين بالشكل بحيث تكون الزاوية  $x'Ox$  هي  $\theta$ . ونفرض أن  $p$  نقطة ما في المستوى وأن إحداثياتها بالنسبة للمحورين الأصليين هما  $(x, y)$  وبالنسبة للمحورين الجديدين هما  $(x', y')$



بتحليل المحورين الجديدين  $x', y'$  في الاتجاهين المتعامدين يكون

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

وكذلك

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

ويمكن الربط بين الإحداثيات قبل وبعد الدوران كما بالمصفوفة الآتية:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

مثال (٣):

أوجد قياس زاوية دوران المحاور بحيث ينعدم الحد  $x'y'$  من معادلة الدرجة الثانية بالنسبة للمحاور بعد الدوران.

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

بفرض أن المحاور دارت بزاوية  $\theta$  فيكون

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

نجد أن المعادلة تصبح

$$\begin{aligned} & (a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta + 2h \sin \theta \cos \theta) x'^2 + \\ & (b \cos^2 \theta + a \sin^2 \theta - 2h \sin \theta \cos \theta) y'^2 + (2b \sin \theta \cos \theta \\ & - 2a \sin \theta \cos \theta + h(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)) x'y' \\ & + (2g \cos \theta + 2f \sin \theta) x' + (2f \cos \theta - 2g \sin \theta) y' + c = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

$$x'y' \text{ معامل} = b \sin 2\theta - a \sin 2\theta + h \cos 2\theta = 0$$

لكي يتلاشى الحد  $xy$  فإن

$$(b - a) \sin 2\theta = -2h \cos 2\theta$$

$$\tan 2\theta = 2h/a - b \Rightarrow \theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2h}{a - b}$$

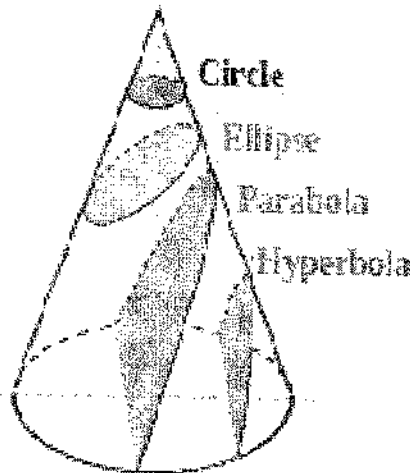
## Conic Sections القطاعات المخروطية

القطاعات المخروطية الثلاث القطع المكافئ Parabola القطع الناقص Ellipse والقطع الزائد Hyperbola. تنشأ من قطع مستوى لمخروط دائري قائم (دائري أى قاعدته دائرة)، قائم (أى محور المخروط عمودى على القاعدة) ومحور المخروط هو المستقيم المار برأس المخروط إلى مركز الدائرة (القاعدة) فإذا كان المستوى يقطع المخروط أفقياً فيكون المقطع دائرة، وإذا كان المستوى يقطع المخروط بشكل مائل فيكون المقطع قطعاً ناقصاً، وإذا كان القطع رأسياً كان المقطع قطعاً مكافئاً. (انظر الرسم) ويعرف القطع المخروطى بأنه المحل الهندسى لنقطة تتحرك فى المستوى بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة تسمى البؤرة Focis إلى بعدها عن مستقيم ثابت يسمى الدليل Directrix هو مقدار ثابت يسمى الاختلاف المركزى ونرمز له بالرمز  $e$  ويكون الاختلاف المركزى

$e < 1$  فى حالة القطع الناقص.

$e = 1$  فى حالة القطع المكافئ.

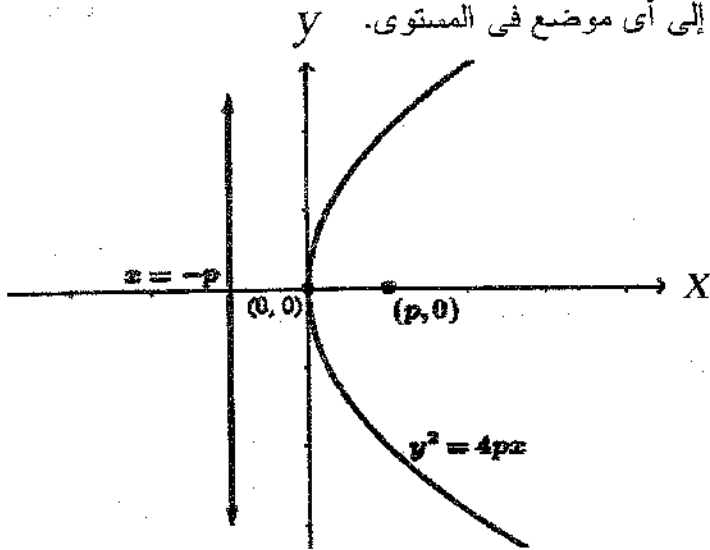
$e > 1$  فى حالة القطع الزائد.



## الباب الثانى

### القطع المكافئ Parabola

يعرف القطع المكافئ بأنه المحل الهندسى لنقطة تتحرك فى المستوى بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة مساويا لبعدها عن مستقيم ثابت. تسمى النقطة الثابتة  $F$  بالبؤرة (Focus) كما يسمى المستقيم الثابت  $D$  الدليل (directors) الخط المستقيم المار بالبؤرة والعمودى على الدليل يسمى محور القطع المكافئ ونقطة تقاطعه مع القطع تسمى رأس القطع Vertex ونرمز لها بالرمز  $V$ . وسوف نبدأ بإختيار مبسط لموقع النقطة  $F$  والدليل  $D$  فى المستوى  $xy$  ويمكننا فيما بعد نقل البؤرة والدليل والمنحنى المنشأ معها بواسطة إزاحة المحاور إلى أى موضع فى المستوى.



والآن نتصور بان البؤرة  $F$  تقع على الجزء الموجب من محور  $x$  على مسافة  $p$  من نقطة الأصل فيكون الدليل موازيا لمحور  $y$  ويقطع مسافة  $p$  من الاتجاه السالب لمحور السينات فيكون للبؤرة الاحداثيات  $F(p,0)$  والدليل المعادلة  $x = -p$

## إيجاد المعادلة القياسية للقطع المكافئ:

إذا كانت النقطة العامة على القطع هي  $P(x, y)$  فإنه من تعريف القطع

المكافئ يكون بعد  $P$  عن البؤرة  $(PF)$  = بعدها عن الدليل  $(PM)$ .

$$PF = \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} \quad \text{بعد } p \text{ عن البؤرة}$$

$$PM = \sqrt{(x+p)^2 + (y-y)^2} \quad \text{بعد } p \text{ عن الدليل}$$

إذن:

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$y^2 = 4px \quad \text{أى أن} \quad (1)$$

ملحوظة: لاحظ من الشكل السابق أن المنحنى متماثل حول محور  $x$  وهو محور القطع في هذه الحالة.

ويكون الرأس  $v(0,0)$  والبؤرة  $F(p,0)$  ومعادلة الدليل

$$x = -p$$

وإذا استخدمنا عملية التماثل  $(x \rightarrow -x)$  نحصل على صورة القطع

المكافئ المتماثل حول الجزء السالب لمحور  $x$  والذي معادلته

$$y^2 = -4px \quad (2)$$

ويكون  $v(0,0)$ ,  $F(-p,0)$ ,  $D(x=p)$

ومن الواضح أيضا أننا نحصل على هذه الصورة الأخيرة إذا بدلنا موقع

البؤرة والدليل.

وبإجراء عملية التماثل  $y \rightarrow x$  فإننا نحصل على القطع المكافئ

المتماثل حول الجزء الموجب لمحور  $y$  والذي معادلته

$$x^2 = 4py \quad (3)$$

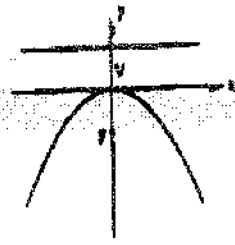
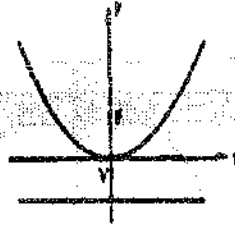
ويكون  $v(0,0)$ ,  $F(0,p)$ ,  $D(y=-p)$

وبإجراء عملية التمثال  $x \rightarrow -y$  فإننا نحصل على القطع المكافئ  
المتماثل حول الجزء السالب من محور  $y$  والذي معادلته

$$x^2 = -4py \quad (4)$$

ويكون

$$v(0,0), F(0,-p), D(y=p)$$



$$y^2 = 4px$$

$$y^2 = -4px$$

$$x^2 = 4py$$

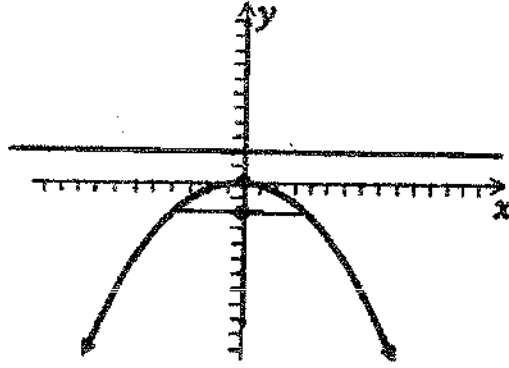
$$x^2 = -4py$$

ويلاحظ أيضا أن مقدار الكمية  $p$  متحكم في اتساع فتحة القطع المكافئ،

بمعنى أنه إذا كانت الكمية  $p$  صغيرة فتكون فتحة القطع صغيرة وكذلك إذا كانت  
كبيرة فتكون فتحة القطع كبيرة.

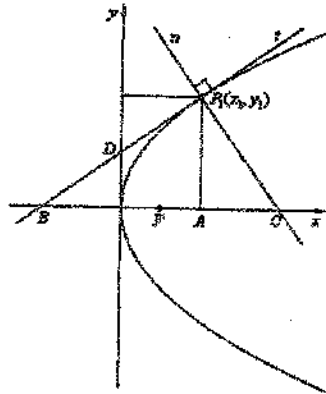
## الوتر البؤري العمودي:

المستقيم الواصل بين نقطتين على القطع المكافئ مارا بالبؤرة يسمى وتر بؤري فإذا كان عموديا على محور القطع يسمى بالوتر البؤري العمودي وطوله  $4p$  لأي قطع مكافئ ويمكن اثبات ذلك بسهولة.



## المماسات للقطع المكافئ:

يجب أن نعتبر الآن المماسات للقطع المكافئ سواء عند نقطة  $p_1$  عليه أو من نقطة  $p_2$  خارجة عنه وحتى نجد معادلة المماس نحسب المشتقة  $y'$  من معادلة القطع أولا فنحصل على ميل المماس وبالتعويض بالنقطة المذكورة نحصل على ميل المماس عند هذه النقطة وعندئذ نستطيع كتابة معادلة المماس وكذلك معادلة العمودي.



## المعادلة العامة للقطع المكافئ:

المعادلة العامة من الدرجة الثانية

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

تمثل قطعاً مكافئاً إذا كان  $s = 0$ ،  $\Delta \neq 0$  حيث

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & 0 \end{vmatrix} \neq 0, s = \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} = 0$$

وعموماً فإن المعادلة

$$x = ly^2 + my + n \quad (5)$$

تمثل قطعاً مكافئاً في الصورة العامة محوره يوازي محور  $x$  وكذلك المعادلة

$$y = lx^2 + mx + n \quad (6)$$

تمثل قطعاً مكافئاً في الصورة العامة محوره يوازي محور  $y$  وبمناقشة إحدى هاتين المعادلتين ولتكن (5) نجد أنه يمكن وضعها على الصورة

$$(y - \beta)^2 = 4p(x - \alpha) \quad (7)$$

وينقل نقطة الأصل إلى النقطة  $\alpha, \beta$  نجد أن المعادلة (7) نأخذ الصورة

$$Y^2 = 4pX$$

وهذه هي معادلة القطع المكافئ الذي محوره هو محور  $X$  ورأسه  $V(0,0)$  وبؤرته  $F(p,0)$  ومعادلة دليله هي  $x = -p$

المعادلة (7) هي معادلة قطع مكافئ محوره يوازي محور  $X$  ومفتوح إلى جهة اليمين ورأسه عند النقطة  $V(\alpha, \beta)$  وبؤرته  $F(p + \alpha, \beta)$  ومعادلة دليله هي:  $x = -p + \alpha$

### أمثلة محلولة

مثال (1): أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته النقطة  $(-1,1)$  ودليله المستقيم  $x - y + 3 = 0$ .

الحل:

نفرض أن النقطة  $P(x, y)$  نقطة ما على القطع ومن تعريف القطع نجد

أن بعد النقطة  $P$  عن البؤرة يساوي بعد النقطة  $P$  عن الدليل أى أن

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \pm \frac{x-y+3}{\sqrt{2}}$$

لاحظ أن بعد النقطة  $(x_0, y_0)$  عن الخط المستقيم  $ax+by+c=0$  هي

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

وبالتربيع

$$2(x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2) = x^2 + y^2 - 2xy + 6x - 6y + 9$$

إذن معادلة القطع هي:

$$x^2 + y^2 + 2xy - 2x + 2y - 5 = 0$$

مثال (٢)

أوجد إحداثيات الرأس والبؤرة وطول الوتر البؤرى العمودى للقطع

المكافئ

$$x^2 - 4x + 8y + 12 = 0$$

الحل:

$$x^2 - 4x + 8y + 12 = 0$$

$$x^2 - 4x = -8y - 12$$

$$(x-2)^2 = -8(y+1)$$

وبمقارنة هذه الصورة بالصورة

$$(x-\alpha)^2 = -4a(y-\beta)$$

نجد أن المعادلة تمثل قطعاً مكافئاً محوره يوازى محور  $y$  ومفتوح لأسفل ورأسه

$$(2, -3) \text{ وبؤرته } p=2, V(2, -1)$$

طول الوتر البؤرى العمودى هو  $4a = 8$

إحداثيات البؤرة هي  $F(2, -3)$

مثال (٣): أوجد معادلة القطع المكافئ الذى محوره يوازى محور  $X$  ويمر

بالنقاط  $(-2, 1)$ ،  $(1, 2)$ ،  $(-1, 3)$ .

**الحل:**

المعادلة العامة للقطع المكافئ الذى محوره يوازى محور  $X$  هي

$$x = ly^2 + my + n$$

وحيث أن النقاط تقع على منحنى القطع فهي تحقق معادلته

$$l + m + n = -2$$

$$4l + 2m + n = 1$$

$$9l + 3m + n = -1$$

وبحل هذه المعادلات نجد أن

$$l = -\frac{5}{2},$$

$$m = \frac{21}{2},$$

$$n = -10$$

إذن معادلة القطع هي

$$2x = -5y^2 + 21y - 20$$

$$5y^2 - 21y + 2x + 20 = 0$$

مثال (٤): أوجد معادلة المماس للقطع  $x^2 = 8y$  عند النقطة  $(-4, 2)$

الواقعة على القطع.

**الحل:** يمكن الحصول على معادلة المماس بإجراء التفاضل لمعادلة القطع

$$y' = \frac{x}{4} \quad \text{فيكون} \quad 8y' = 2x \quad \text{أى أن}$$

$$P_1(-4, 2) \text{ عند النقطة } \text{ميل المماس} = \frac{-4}{4} = -1$$

وبما أن معادلة المستقيم المار بالنقطة  $(a, b)$  وميله  $m$  هي

$$y - b = m(x - a)$$

فتكون معادلة المماس بالصورة

$$y-2=-1(x+4)$$

$$x+y+2=0$$

إذن

### تمارين

١- أوجد معادلة القطع المكافئ الذى له

1-  $V(0,3), F(0,1)$       2-  $V(-3,0), D(x=2)$

3-  $F(-3,2), D(x+y+4=0)$

٢- أوجد البؤرة  $F$  والدليل  $D$  ومحور القطع الذى معادلته

1-  $x^2+2y=8x-7$

2-  $y^2=4x+4y$

3-  $3x^2=2y-3x$

4-  $x=-y^2+2y-7$

٣- أوجد معادلة المماس والعمودى للقطع المكافئ

أ-  $y^2=9x$  عند  $(4,6)$

ب-  $y^2=6x$  عند  $(6,6)$

ج-  $y^2=4x$  عند نقطتي تقاطع الوتر البؤرى العمودى مع القطع.

٤- أوجد معادلة المماس للقطع  $y^2=7x$  الموازى للمستقيم

$$4y-x+3=0$$

٥- أوجد معادلة المماس للقطع  $y^2=9x$  الذى يمر بالنقطة

$$(4,6)$$

٦- أثبت أنه لكى يمس الخط المستقيم  $lx+my+n=0$  القطع

$$y^2=4ax \text{ فإن } ln=am^2$$

٧- عين قيم  $m$  التى تجعل الخط المستقيم  $y=mx+2$

أ- قاطعا للقطع المكافئ  $y^2=4x$

ب- مماسا لهذا القطع.

ج- غير متقاطع معه.

## الباب الثالث القطع الناقص

**تعريف:** القطع الناقص هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث

يكون مجموع بعدها عن نقطتين ثابتتين في المستوى مساويا لمقدار

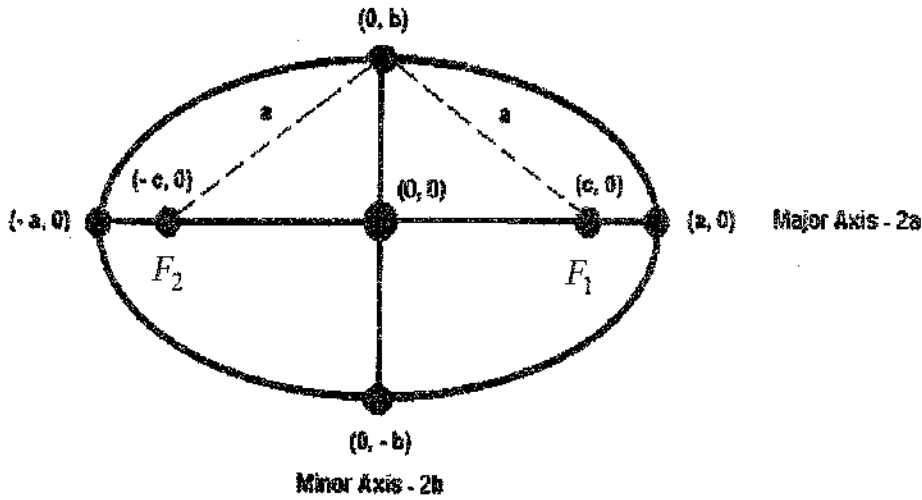
ثابت تسمى النقطتين الثابتتين  $F_1, F_2$  بالبوريتين والمقدار الثابت  $2a$

(فرضا) يكون أكبر من البعد  $F_1F_2$ .

الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص:

نفرض أن البعد  $F_1F_2$  يساوى  $2c$  حيث  $c$  مقدار ثابت. وتقع نقطة

الأصل  $O$  في منتصف  $F_1F_2$



وعلى ذلك يكون إحداثيات البوريتين هما

$$(c,0), (-c,0) \quad (1)$$

نفرض أن نقطة ما واقعة على القطع الناقص فإنه من تعريف القطع نجد أن

$$MF_1 + MF_2 = 2a$$

حيث  $a$  مقدار ثابت أكبر من  $c$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

إذن

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

بتربيع طرفي المعادلة السابقة

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$$

بالقسمة على 4 والتربيع مرة أخرى

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

بالقسمة على  $a^2(a^2 - c^2)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

يكون

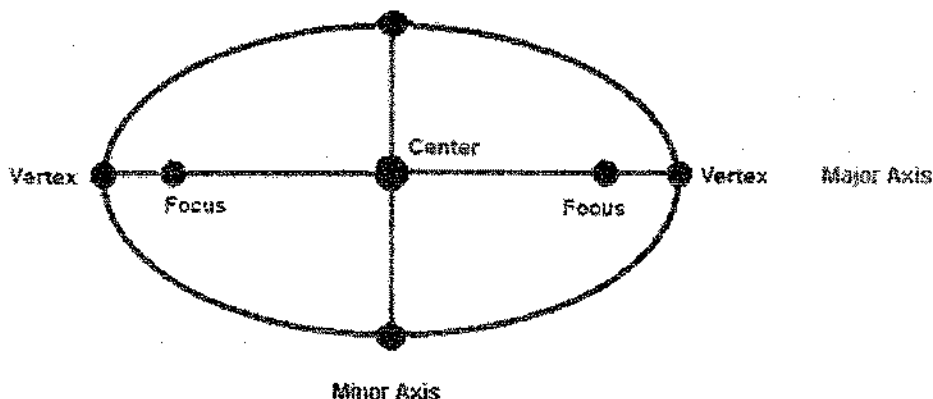
ونحصل على معادلة القطع بالضرورة

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

(2)

حيث  $b^2 = a^2 - c^2$

المعادلة (2) تسمى المعادلة القياسية للقطع الناقص



وبدراسة معادلة القطع (٢) نجد ما يلي:-

أ- القطع متماثل حول كل من  $oy, ox$  وحول نقطة الأصل ويظهر

ذلك من قوى  $x, y$  في المعادلة.

ب- بوضع  $x = 0$  نجد أن  $y = \pm b$  بوضع  $y = 0$  نجد أن  $x = \pm a$  ومن

ذلك يتضح أن القطع يقطع محور  $x$  في النقطتين  $A_1(a, 0), A_2(-a, 0)$

ويقطع محور  $y$  في  $B_1(0, b), B_2(0, -b)$  وهذه النقاط  $A_1, A_2, B_1, B_2$

تسمى رؤوس القطع الناقص والقطعة المستقيمة  $A_1 A_2$  تسمى المحور

الأكبر (major axis) وطوله  $2a$  والقطعة المستقيمة  $B_1 B_2$  تسمى

المحور الأصغر (mainor axis) وطوله  $2b$ .

مثال (١): أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتيه

$(3, 0)$  وطول محوره الأكبر 8.

الحل:

حيث أن مركز القطع هو نقطة الأصل وبؤرتيه  $(3, 0)$  فإن  $c = 3$

والمحور الأكبر ينطبق على محور  $x$ .

$$2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 9 = 7$$

بما أن المعادلة القياسية للقطع هي

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

فتكون المعادلة المطلوبة هي

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

## الوتر البؤري العمودي للقطع الناقص:

تسمى القطعة المستقيمة التي تصل بين نقطتين على القطع الناقص ويمر بأحدى بؤرتيه "وترا بؤريا" وإذا كان الوتر البؤري عمودي على المحور الأكبر فإنه يسمى "وترا بؤريا عموديا" وواضح من الشكل (٢) أن  $P_1P_2$  هو احد الوترين البؤريين العموديين للقطع وهو يمر بالبؤرة  $F_1$  وعموديا على  $A_1A_2$  ولإيجاد طول الوتر البؤري العمودي نفرض أن  $P_1(x_1, y_1)$  حيث  $y_1 = l$ ،  $x_1 = c$

حيث أن  $P_1$  نقطة واقعة على القطع الناقص فهي تحقق معادلته

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} = 1$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$l^2 = b^2 \left( 1 - \frac{c^2}{a^2} \right) = \frac{b^2(a^2 - c^2)}{a^2} = \frac{b^4}{a^2}$$

نصف طول الوتر البؤري العمودي هو:

$$l = b^2/a$$

ويكون طول الوتر البؤري العمودي لأي قطع ناقص يساوي  $\frac{2b^2}{a}$

$$2l = 2b^2/a$$

## الاختلاف المركزي للقطع الناقص:

تعريف: تسمى النسبة  $\frac{c}{a}$  بالاختلاف المركزي ويرمز لها بالرمز  $e$  وحيث أنه

في القطع الناقص  $c < a$  فإن الاختلاف المركزي للقطع الناقص  $e < 1$ . ولإيجاد صيغة الاختلاف المركزي للقطع الناقص:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (3)$$

\* المعادلة (٣) تعطي قيمة الاختلاف المركزي

للقطع الناقص وهي دائما أصغر من الواحد الصحيح.

ملاحظات:

أ- من العلاقة (٣) نجد أنه كلما اقتربت  $c$  من الواحد الصحيح كلما

صغرت النسبة  $\frac{b}{a}$  ومعنى هذا أن المحور الأصغر يقل طوله

كلما زادت قيمة  $e$  ( $e < 1$ ) أي أن القطع يزداد انبعاجه باقتراب

الاختلاف المركزي من الواحد الصحيح.

ب- إذا كانت  $a = b$  فإن الاختلاف المركزي ينعدم  $e = 0$  وتصبح

معادلة القطع هي  $x^2 + y^2 = a^2$  أي أن الدائرة هي حالة

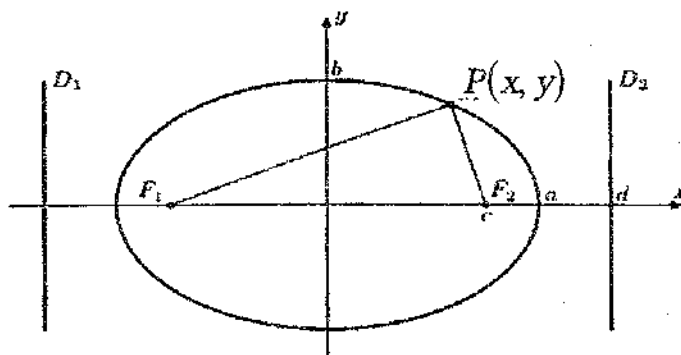
خاصة من القطع الناقص.

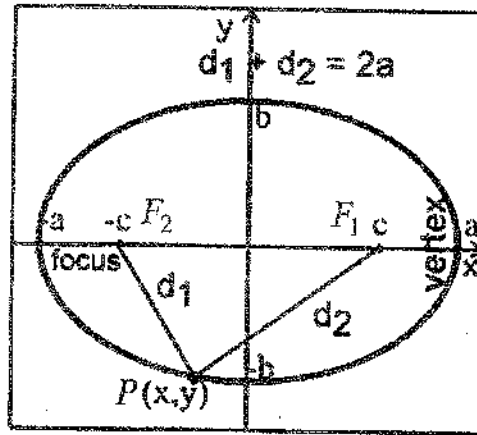
قاعدة: لأي نقطة  $P(x, y)$  على القطع الناقص

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{يتحقق أن}$$

$$PF_1 = a - ex,$$

$$PF_2 = a + ex$$





ملاحظة:

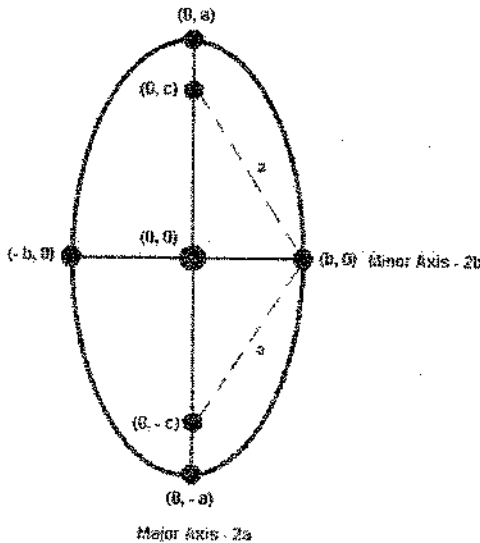
إذا كانت معادلة القطع الناقص هي

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

حيث  $b > a$  ينطبق المحور الأكبر على المحور  $y$  والمحور الأصغر ينطبق على  $x$  وتكون البؤرتين على المحور الأكبر  $y$  والبعد بينهما  $2c$  حيث

$$be = c\sqrt{b^2 - a^2}$$

ويكون الدليلين هما  $y = \pm \frac{b}{e}$



مثال (٢): أوجد معادلة القطع الناقص الذى بؤرتيه (0,1) ودليله المناظر

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ لها هو المستقيم } 2x + y = 0 \text{ واختلافه المركزى}$$

**الحل**

لحل هذا المثال نقدم تعريفا آخر للقطع الناقص:-

**القطع الناقص:** هو المحل الهندسى لنقطة تتحرك فى المستوى بحيث يكون

النسبة بين بعدها عن نقطة ثابتة (البؤرة) إلى بعدها عن مستقيم ثابت (الدليل) هو

مقدار ثابت يسمى الاختلاف المركزى والذي رمزنا له بالرمز  $e$  وهذا التعريف

ينطبق على القطاعات الثلاثة حيث  $e < 1$  فى القطع الناقص و  $e > 1$  فى القطع

الزائد،  $e = 1$  فى القطع المكافئ.

نفرض أن  $P(x, y)$  هى نقطة على القطع ومن تعريف القطع نجد أن

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} = \frac{1(2x+y)}{\sqrt{3}\sqrt{4+1}}$$

وبالتربيع

$$15(x^2 + y^2 - 2y + 1) = 4x^2 + 4xy + y^2$$

$$11x^2 + 14y^2 - 4xy - 30y + 15 = 0$$

مثال (٣): أوجد احداثيات البؤرتين للقطع الناقص

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

وأوجد كذلك رؤوسه

**الحل:**

من معادلة القطع نجد أن

$$a = 4, \quad b = 2$$

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{16 - 4}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$$

البؤرتين هما

$$F_1 = (2\sqrt{3}, 0), \quad F_2 = (-2\sqrt{3}, 0)$$

والرؤوس هي

$$A_1 = (4, 0), \quad A_2 = (-4, 0)$$

$$B_1 = (0, 2), \quad B_2 = (0, -2)$$

| Horizontal Ellipse                                       | Vertical Ellipse                                         |
|----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| At (0, 0): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$       | At (0, 0): $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$       |
| General: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ | General: $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ |
| $a^2 - b^2 = c^2$                                        | $a^2 - b^2 = c^2$                                        |
| Center: (h, k) Foci: (h ± c, k)                          | Center: (h, k) Foci: (h, k ± c)                          |
| Vertices: (h ± a, k) Co-Vertices: (h, k ± b)             | Vertices: (h, k ± a) Co-Vertices: (h ± b, k)             |
|                                                          |                                                          |

معادلة القطع الناقص الذي مركزه  $(h, k)$  ومحوراه يوازيان محوري الإحداثيات

باستخدام إزاحة المحاور بحيث تكون المحاور الذاتية للقطع  $X, Y$  مع الخطين الأفقي  $y = k$  والرأسي  $x = h$  فتكون معادلة القطع هي

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{أى أن}$$

ومن الواضح أن مركز القطع ومحوريه ورؤوسه الأربعة وبؤرتيه ودليليه هم كما يلي:

١- المركز  $c(h, k)$

٢- الرؤوس  $V_1, V_2, V_3, V_4$

٣- البؤرتين

$$F_1(h+c, k), F_2(h-c, k)$$

$$D\left(x=h+\frac{a}{e}\right), D_2\left(x=h-\frac{a}{e}\right)$$

### المحورين:

المحور الرئيسى (الأكبر)  $V_1V_2$  طوله  $2a$  ومعادلته  $y=k$

المحور (الأصغر)  $V_3V_4$  طوله  $2b$  ومعادلته  $x=h$

ملاحظة: إذا كان للمحور الأفقى  $2a$  أصغر من المحور الرأسى  $2b$  فيصبح

الأخير هو المحور الرئيسى وتقع عليه البؤرتين ويكون البؤرتان

$$F_1(h, k+c), F_2(h, k-c)$$

والدليلين

$$D_1\left(y=k+\frac{a}{e}\right), D_2\left(y=k-\frac{a}{e}\right)$$

وبالطبع يظل المركز والرؤوس الأربعة كما وردت أعلاه.

مثال (٤): ارسم القطع الناقص

$$3x^2 + 4y^2 + 12x - 8y + 4 = 0$$

مبيناً مركزه ورؤوسه وبؤرتيه ودليليه ومحوريه ثم أوجد المماس له عند النقطة

$$P_1\left(-1, \frac{5}{2}\right)$$

الحل:

نبدأ بإكمال المربع في  $y, x$  حيث نجد أن

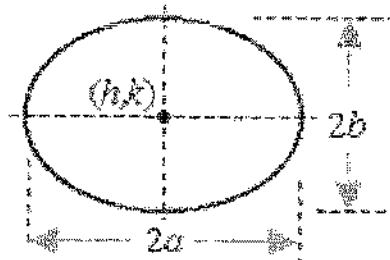
$$3(x^2 + 4x + 4 - 4) + 4(y^2 - 2y + 1 - 1) + 4 = 0$$

$$3(x+2)^2 + 4(y-1)^2 = 12$$

$$\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{3} = 1$$

Ellipse type 1:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



من الواضح أن مركز القطع عند النقطة  $(-2, 1)$  ويكون محوريه هما الأكبر  $y=1$  الأصغر  $x=-2$  وبالنسبة لهذين المحورين تكون معادلة القطع بهذه

الصورة

$$\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{3} = 1,$$

أى أن

$$c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 3 = 1$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

ويكون بعد البؤرتين عن المركز هو  $c=1$

وبعد الدليلين عن المركز  $\frac{a}{e} = 4$

والرؤوس هي

$$\begin{array}{ll} V_1(0,1), & V_2(-4,1) \\ V_3(-2,1+\sqrt{3}) & V_4(-2,1-\sqrt{3}) \\ F_1(-1,1), & F_2(-3,1) \\ D_1(x=2), & D_2(x=-6) \end{array}$$

المحور الأكبر طوله 4

المحور الأصغر طوله  $2\sqrt{3}$

المماس عند النقطة  $P_1\left(-1, \frac{5}{2}\right)$

يمكننا إيجاد المماس بطريقة مباشرة عن طريق التفاضل للمعادلة

$$3x^2 + 4y^2 + 12x - 8y + 4 = 0$$

$$6x + 8yy' + 12 - 8y' = 0$$

$$y' = \frac{6(x+2)}{8(y-1)} = \frac{3(x+2)}{4(y-1)}$$

وبذلك يكون ميل المماس عند النقطة  $P_1\left(-1, \frac{5}{2}\right)$  هو

$$m = \frac{-3(-1+2)}{4\left(\frac{5}{2}-1\right)} = -\frac{1}{2}$$

وتكون معادلة المماس هي

$$y - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}(x+1)$$

$$2y + x - 4 = 0$$

## تمارين

١- أوجد البؤرتين والدليلين وقيمة الاختلاف المركزي وطول الوتر البؤري العمودي للقطع الناقص

a-  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{24} = 1$

b-  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$

c-  $4x(x+2) + 3y(y+2) = 41$

٢- أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرته  $(2, -3)$  ودليله المناظر المستقيم

$$2x - y + 7 = 0 \text{ واختلافه المركزي } \frac{1}{\sqrt{5}}$$

٣- أوجد معادلتى المماس والعمودى للقطع الناقص  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{16} = 1$  عند

النقطة  $(0, 4)$  الواقعة عليه.

٤- أوجد معادلة القطع الناقص فيما يأتى:-

أ- نهايتا محور الأكبر  $(\pm 3, 0)$  ونهايتا محوره الأصغر  $(0, \pm 2)$

ب- طول محوره الأكبر 16 واحداثيات بؤرتيه  $(\pm 5, 0)$

ج- البؤرتان  $(\pm 1, 0)$ ، طول محوره الأصغر  $2\sqrt{2}$ .

د- نهايتا محوره الأكبر  $(\pm 6, 0)$  ويمر بالنقطة  $(2, 3)$ .

هـ- مركزه نقطة الأصل وتطبق محاوره على محاور الاحداثيات، ويمر

بالنقطتين  $(1, 6)$ ،  $(3, 2)$

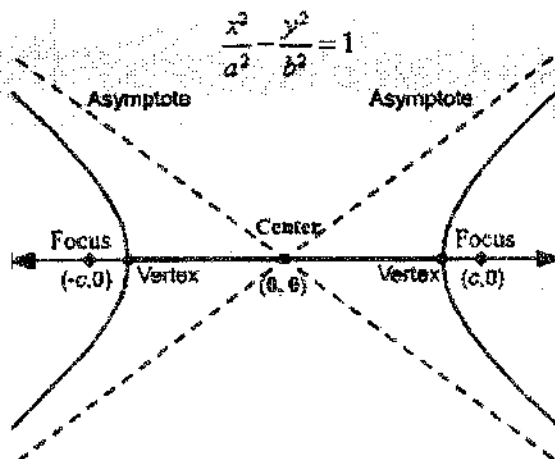
## الباب الرابع القطع الزائد (Hyperbola)

تعريف: هو المحل الهندسى للنقط التى يكون الفرق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتين  $F_1, F_2$ ) كمية ثابتة.

وبذلك إذا كانت  $p$  نقطة على القطع الزائد فإن الفرق بين البعدين

$PF_1, PF_2$  مقدار ثابت ليكن  $2a$ .

وبفرض أن البعد بين البؤرتين  $F_1, F_2$  يساوى  $2c$



فيمكننا بطريقة مماثلة كما فى القطع الناقص استنتاج المعادلة القياسية

للقطع الزائد بالصورة

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

حيث  $c^2 = a^2 + b^2$

المعادلة (1) تمثل معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل واختلافه المركزى

المعادلة (1) وهو أكبر من (1) فى القطع الزائد، وفى حالة القطع (1)  $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$

تقع البؤرتان على محور  $x$ .

أما في حالة القطع الزائد  $\frac{-x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  تقع البؤرتان على محور  $y$

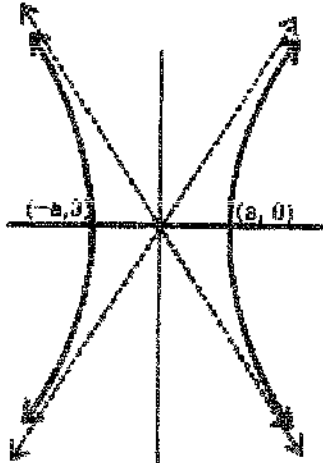
وفي الحالتين فإن مركز القطع هو نقطة الأصل.

**Horizontal Transverse Axis**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y = -\frac{b}{a}x$$

$$y = \frac{b}{a}x$$

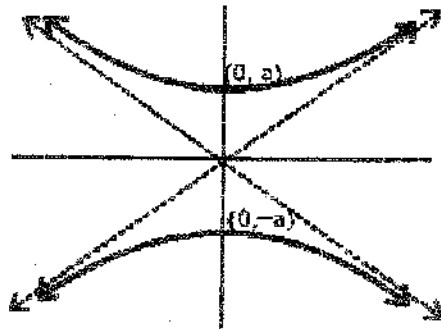


**Vertical Transverse Axis**

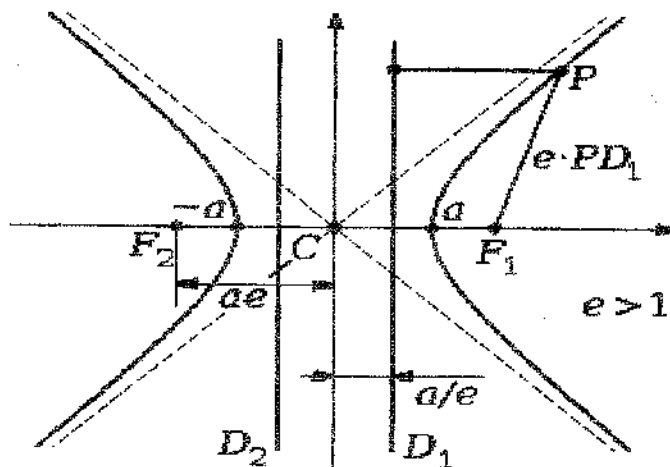
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$y = -\frac{a}{b}x$$

$$y = \frac{a}{b}x$$



www.mathsrevision.co.uk



أ- إذا كانت البؤرتين على محور  $x$  فإن:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$x^2 > a^2 \Rightarrow -a < x < a, -\infty < y < \infty$$

ب- إذا كانت البؤرتين على محور  $y$  فإن

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y^2 > b^2 \Rightarrow -\infty < x < \infty, -b < y < b$$

سنذكر فيما يلي جميع النقاط والمحاور الخاصة بكل من الحالتين (أ)، (ب) أعلاه كما هو موضح بالرسم السابق.

### الحالة (أ)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$e = \frac{c}{a}$$

١- المركز  $O(0,0)$

٢- الرأسين

$$V_1(a,0),$$

$$V_2(-a,0)$$

٣- البؤرتين

$$F_1(c,0),$$

$$F_2(-c,0)$$

٤- الدليلين

$$D_1 : \left( x = \frac{a}{e} \right),$$

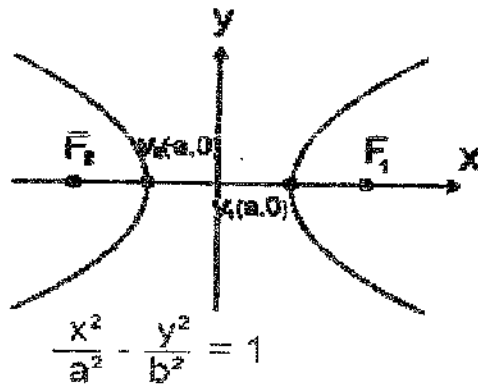
$$D_2 : \left( x = -\frac{a}{e} \right)$$

٥- المحورين

المحور الرئيسي (محور  $x$ ) ويقع عليه البؤرتين ويقطع القطع في  
النقطتين  $V_1, V_2$  ، المحور المرافق (محور  $y$ ) لا يقطع القطع ويوازي الدليلين.  
٦- الخطان التقاربان ونحصل عليها بحل المعادلة

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$



### الحالة (ب)

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$e = \frac{c}{b} \quad , \quad \text{١- المركز } (0,0)$$

٢- الرأسان

$$V_1(0, a), \quad V_2(0, -a)$$

٣- البؤرتان

$$F_1(0, c), \quad F_2(0, -c)$$

٤- الدليلين

$$D_1: \left( y = \frac{b}{e} \right), \quad D_2: \left( y = -\frac{b}{e} \right)$$

٥- المحورين

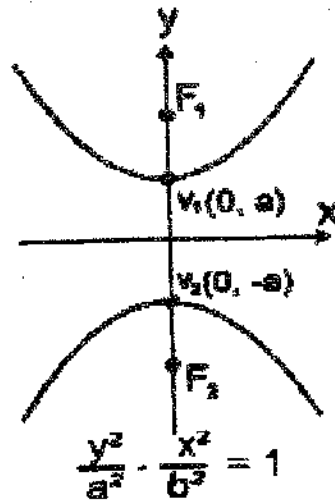
المحور الرئيسي (محور  $y$ ) عليه تقع البؤرتين ويقطع القطع  $V_1, V_2$ ،  
والمحور المرافق (محور  $x$ ) ولا يقطع القطع ويوازي التاليلين.

٦- الخطان التقاربان ونحصل عليها بحل المعادلة

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

وهما نفس الخطين في الحالة (أ)

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$



## المماسات للقطع الزائد

يفضل دائما الحصول على معادلات المماسات باستخدام التفاضل بأن نعين  $y'$  مع معادلة المنحنى وكما نعلم فإن  $y'$  تمثل ميل المماس. ويمكننا اثبات أن معادلة المماس في الحالة أ عند النقطة  $(x_1, y_1)$  على منحنى القطع هي

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

أما في الحالة ب فإن معادلة المماس عند النقطة  $(x_1, y_1)$  هي

$$-\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

مثال (١): ارسم القطع الزائد

$$4x^2 - 9y^2 + 8x + 36y = 68$$

مبيننا نقاطه وخطوطه الهامة. ثم أوجد المماس له عند النقطة  $\left(-\frac{19}{4}, \frac{1}{2}\right)$

الحل:

$$4(x^2 + 2x + 1 - 1) - 9(y^2 - 4y + 4 - 4) = 68$$

$$4(x+1)^2 - 9(y-2)^2 = 36$$

$$\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

١- المركز  $c(-1, 2)$  المحور الرئيسي  $y = 2$  والمحور المرافق

$$x = -1$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13} \quad e = \frac{\sqrt{13}}{3}, \quad \frac{a}{e} = \frac{9}{\sqrt{13}}$$

٢- البؤرتان

$$F_1(-1 + \sqrt{13}, 2), \quad F_2(-1 - \sqrt{13}, 2)$$

٣- الدليلان

$$D_1\left(x = -1 + \frac{9}{\sqrt{13}}\right), \quad D_2\left(x = -1 - \frac{9}{\sqrt{13}}\right)$$

٤- الرأسان

$$V_1(2,2), \quad V_2(-4,2)$$

٥- الخطان التقاربيان

$$\frac{y-2}{2} = \pm \frac{x+1}{3}$$

$$\left(-\frac{19}{4}, \frac{1}{2}\right) \text{ لإيجاد معادلة المماس عند النقطة}$$

عن طريق التفاضل نجد أن

$$y' = \frac{4(x+1)}{9(y-2)}$$

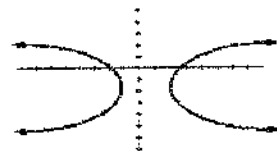
ويكون ميل المماس عند النقطة هو

$$m = 10/9$$

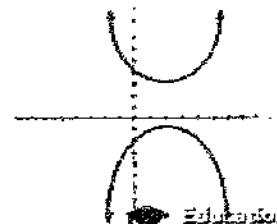
ومعادلة المماس هي

$$y - \frac{1}{2} = \frac{10}{9}\left(x + \frac{19}{4}\right) \Rightarrow 9y = 10x + 52$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



Education Portal

## القطع الزائد القائم:

معادلتا الخطين التقاربين للقطع  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  هما المستقيمان

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

الذين ميلهما

$$m_1 = -\frac{b}{a}, \quad m_2 = \frac{b}{a}$$

ويتعامد الخطين التقاربين إذا كان

$$m_1 m_2 = -\frac{b^2}{a^2} = -1$$

أى إذا كان  $a^2 = b^2$  وفى هذه الحالة يتساوى المحوران القاطع والمرافق. ويسمى القطع الزائد الذى خطاه التقاربين متعامدان قطعاً زائداً قائماً.

وفى هذه الحالة تكون معادلته هى

$$x^2 - y^2 = a^2$$

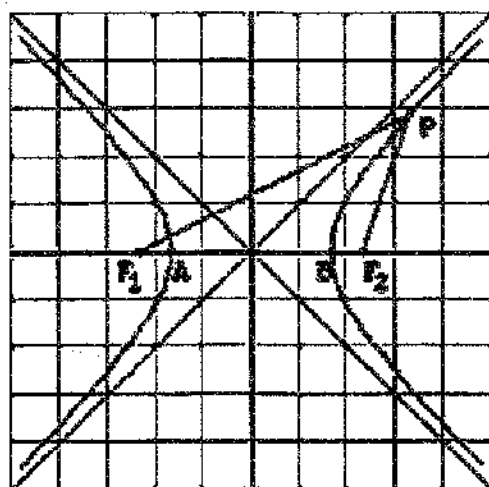
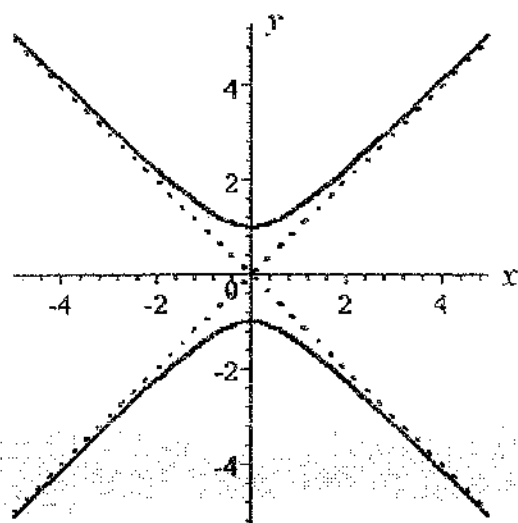
ويكون ميل الخطين التقاربين هما  $\pm 1$  أى أنهما ينصفان الزاويتين بين محاور الإحداثيات وحيث أن  $a = b$  فإن

$$e = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{2a^2}{a^2}}$$

وبذلك يكون الاختلاف المركزى للقطع الزائد القائم

$$e = \sqrt{2}$$

انظر الشكل فى الصفحة التالية.



## تمارين

١- أوجد طول المحور الرئيسى وإحداثيات البؤرتين والرأسين

ومعادلتى الدليلين لكل من القطاعات الزائدة الآتية:

a-  $9x^2 - 4y^2 = 36$

b-  $5x^2 - 6y^2 + 30 = 0$

c-  $5y^2 - 3x^2 = 15$

d-  $4x^2 - 3y^2 - 8 = 0$

٢- أوجد معادلة القطع الزائد فى كل حالة

a-  $V(\pm 6, 0), F(\pm 10, 0)$

b-  $V = (0, \pm 2)$

ويمر بالنقطة  $(-2, 3)$

c-  $F_1(7, 0), F_2(1, 0)$

$PF_1 - PF_2 = \pm 2$

٣- أوجد معادلتى المماس والعمودى للقطع الزائد

$\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{4} = 1$  عند النقطة  $(-3\sqrt{2}, 0)$

٤- أوجد نقط تقاطع المستقيم  $4x - 3y - 16 = 0$  مع القطع الزائد

$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$  ثم أوجد المماسات عند نقاط التقاطع.

٥- أوجد المماسات للقطع  $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$  عند النقطتين

$(10, 4)$  و  $(2\sqrt{10}, 1)$  وأوجد نقطة تقاطعهما.

٦- قطع زائد محوره هما محورا الاحداثيات ويمر بالنقطتين

$(12, 5)$  و  $(3\sqrt{2}, 2)$  احسب اختلافه المركزى وطول وتره

البؤرى العمودى. وأوجد بؤرتيه ودليله.

## Appendix (1)

### Differentiation التفاضل

أولاً: مجموعات الأعداد

١- مجموعة الأعداد الطبيعية The Set of Natural Numbers

$$N = \{0, 1, 2, 3, \dots, \dots\}$$

٢- مجموعة الأعداد الصحيحة The Set of Integers

$$I = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \dots\}$$

٣- مجموعة الأعداد النسبية The Set of Rational Numbers

$$Q = \{P/q : P, q \in I, q \neq 0\}$$

وتسمى أيضاً مجموعة الأعداد الكسرية، كذلك مجموعة الأعداد القياسية

لا يمكن كتابة عناصر هذه المجموعة بطريقة السرد وكل عدد لا يمكن وضعه

على الصورة  $P/q$  يسمى عدد غير نسبي مثل  $\sqrt{2}, \sqrt[3]{7}$ .

٤- مجموعة الأعداد الحقيقية The Set of Real Numbers

هي مجموعة غير منتهية، عناصرها هي الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية أي

عناصرها مثل

$$2, -5, 3/4, -2/5, \sqrt{3}, \sqrt[3]{7}$$

ويرمز لها بالرمز  $R$  وعلى ذلك تكون

$$R = Q \cup Q'$$

ونلاحظ أنه

$$N \subset I \subset Q \subset R$$

\* مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة إذا أضفنا لمجموعة الأعداد الحقيقية الرمز  $\infty$

$\pm \infty$  نحصل على ما يسمى مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة.

$$R^* = \{-\infty\} \cup R \cup \{+\infty\}$$

الرمزان  $-\infty, \infty$  ليس لأي منهما قيمة محددة وبالتالي فهما ليس بعددين

حقيقيين ويرتبطان بالأعداد الحقيقية بالمسلمات الآتية:

$$-1 \text{ لكل } x \in R \quad -\infty < x < \infty$$

$$-2 \text{ لكل } x \in R \quad -\infty = -\infty \pm x, \infty \pm x = \infty$$

$$-3 \quad \left. \begin{array}{l} \infty \text{ لكل } x \in R^+ \\ -\infty \text{ لكل } x \in R^- \end{array} \right\} = x \cdot \infty$$

$$-4 \quad \left. \begin{array}{l} \infty \text{ لكل } x \in R^+ \\ -\infty \text{ لكل } x \in R^- \end{array} \right\} = \frac{\infty}{x}$$

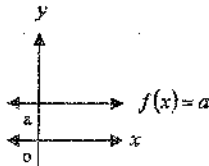
### ٥- مجموعة الأعداد المركبة The Set of Complex Numbers

$$C = \{a + ib : a, b \in R, i = \sqrt{-1}\}$$

ندرسها في هذا المقرر

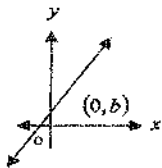
ثانياً: بعض أنواع الدوال:

١- الدالة الثابتة



$$a \in R \text{ لكل } f(x) = a$$

٢- الدالة الخطية



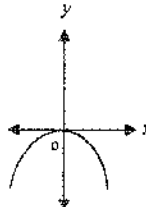
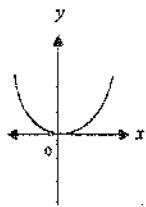
$$f: R \rightarrow R \text{ حيث } f(x) = ax + b$$

حيث  $a, b \in R$  وتمثل بيانياً بخط مستقيم

٣- الدالة التربيعية (دالة الدرجة الثانية)

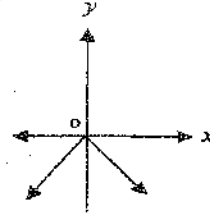
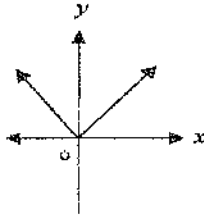
$$f: R \rightarrow R \text{ حيث } f(x) = ax^2 + bx + c$$

وليس من الضروري أن تكون الرأس عند نقطة الأصل



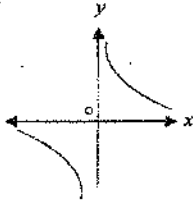
#### ٤- دالة المقياس

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



#### ٥- الدالة

$$x \neq 0, f(x) = \frac{1}{x}$$



ثالثاً: الكميات المحددة والكميات غير المحددة:

\* الكمية المحددة هي الكمية التي ناتجها عدد حقيقي وحيد.

\* الكمية غير المحددة هي الكمية التي ليس لها ناتج وحيد مثل

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, \dots$$

رابعاً: النهايات:

حساب نهاية الدالة من أهم الموضوعات في التفاضل فمنها يتحدد اتصال

الدالة وقابلية الاشتقاق.

عند حل مسائل النهايات يجب أن نبدأ أولاً بالتعويض المباشر فإذا حصلنا

على كمية محددة تكون هي الإجابة، أما إذا حصلنا على كمية غير محددة فنكون

في حاجة إلى تحديد هذه الكمية  $f(x)$ .

نظرية: إذا كانت  $f(x)$  كثيرة حدود في المتغير  $x$  فإن  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  أى نحصل على النهاية بالتعويض المباشر.

إذا كانت النتيجة  $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$  فإننا نحاول حذف العامل الصفري من البسط والمقام وذلك بالتحليل بإخراج العامل المشترك أو فرق بين مربعين أو فرق بين مكعبين ومجموعهما . إذا كانت هناك صعوبة في تحليل المقدار فنقسم كلا من البسط والمقام على العامل الصفري  $x-a$  أو نضرب في مرافق البسط أو مرافق المقام.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1} \quad \text{نظرية:}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x^m - a^m} = \frac{n}{m} a^{n-m} \quad \text{نتيجة:}$$

نهاية الدالة عند اللانهاية:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{نظرية:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x^n} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x} = 0 \quad \text{فإن } a \in R \quad \text{نتيجة: إذا كان}$$

لتعيين الكمية غير المعينة  $\frac{\infty}{\infty}$  نبدأ بقسمة كلا من البسط والمقام على  $x$  ذات أكبر قوة للمتغير  $x$  في المقام.

$$\text{نظرية: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad x \text{ مقيسة بالتقدير الدائري.}$$

نتيجة:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$$

## Appendix (2)

### حساب المثلثات Trigonometry

تستخدم قواعد حساب المثلثات بكثرة في علم الرياضيات وخصوصا  
التفاضل والتكامل.

حساب المثلثات:

أ- الدوال المثلثية:

تسمى الدوال المثلثية الثلاث  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$  الدوال المثلثية  
الأساسية، كما تعرف مقلوبات هذه الدوال كما يلي:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}, \quad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

كما أن

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

ومعلوم أن حاصل ضرب أى دالة فى مقلوبها يساوى الوحدة بمعنى أن  
 $\sin x \cdot \csc x = \cos x \cdot \sec x = \tan x \cot x = 1$

ب- بعض المتطابقات المثلثية الهامة:

كلمة متطابقة تعنى أن العلاقة تتحقق لكل قيم  $x$  وهذا بخلاف المعادلة  
والتي تتحقق لقيم معينة لـ  $x$ .

١- المتطابقات الأساسية:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x, \quad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

٢- المتطابقات المثلثية لمجموع وفرق زاويتين:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

### ٣- المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية:

نحصل عليها بوضع  $x = y$  في مجموعة المتطابقات (٢) فنحصل على

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

ونود الإشارة إلى أن معنى كلمة متطابقة كما ذكرنا آنفا تعطينا

المتطابقات الآتية (بوضع  $x/2$  بدلا من  $x$ ) في مجموعة المتطابقات (٣)

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\tan x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}$$

وهكذا يمكننا وضع  $x$  بأي قيمة وسوف تتحقق المتطابقات.

### Appendix (3)

#### التكامل Integration

التكامل هو العلم الذي يبحث عن الدالة إذا عرفت مشتقتها ولذلك

فالتفاضل والتكامل كلاهما عكس الآخر ونحصل على الصور القياسية للتكامل من

قواعد التفاضل معكوسة.

بعض الصور القياسية للتكامل:

$$1- \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

$$2- \int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}, \quad n \neq -1$$

$$3- \int dx = x + c$$

$$4- \int af(x)dx = a \int f(x)dx + c$$

ونعتبر القاعدة الهامة

$$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1$$

تعميما للثلاث قواعد الأولى في الصور القياسية أعلاه.

## Appendix (4)

### الجبر Algebra

١- المعادلة العامة من الدرجة الثانية:

المعادلة العامة من الدرجة الثانية  $ax^2 + bx + c = 0$  حيث  $a, b, c$  أعداد حقيقية تحل بالقانون العام

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

٢- الدالة الزوجية والدالة الفردية:

يقال للدالة  $f(x)$  أنها زوجية إذا كان  $f(-x) = f(x)$  ويقال لها فردية إذا كان  $f(-x) = -f(x)$  ويوجد الكثير من الدوال لا هي زوجية ولا فردية. الدالة  $f(x) = x^2 + 1$  دالة زوجية، الدالة  $f(x) = x^3 - x$  دالة فردية، الدالة  $f(x) = x^2 + x$  لا زوجية ولا فردية.

٣- قوانين الأسس:

لكل  $x \in R^+$  عندان كسريان فإن

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad x^m \cdot x^n &= x^{m+n} & \text{(ii)} \quad \frac{x^m}{x^n} &= x^{m-n} \\ \text{(iii)} \quad x^0 &= 1, \quad x \neq 1 & \text{(iv)} \quad x^{-n} &= 1/x^n \\ \text{(v)} \quad (x^m)^n &= x^{m \cdot n} \end{aligned}$$

ويتوزع الأس على حاصل الضرب وعلى خارج القسمة بمعنى

$$\begin{aligned} \text{(iv)} \quad (x \cdot y)^n &= x^n \cdot y^n & \text{(vii)} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^m &= \frac{x^m}{y^m} \end{aligned}$$

٤- قوانين اللوغاريتمات

لكل  $a \in R^+ - \{1\}$  ،  $x, y \in R^+$  فإن

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \log_a(x \cdot y) &= \log_a x + \log_a y & \text{(ii)} \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a x - \log_a y \end{aligned}$$

$$(iii) \log_a x^n = n \log_a x$$

$$(iv) \log_a a = 1$$

$$(v) \log_a 1 = 0$$

ملاحظة (١):

$\ln x = \log_e x$  حيث  $e \approx 2.718$  ويسمى الأساس الطبيعي اللوغاريتمات،  $\log_{10} x$  تكتب  $\log x$  وتسمى اللوغاريتم المعتاد.

ملاحظة (٢):

تسمى  $\log_a x = b$  الصورة اللوغاريتمية وهي تكافئ الصورة الأسية  $a^b = x$ .

٥- نظرية ذات الحدين:

نقدم في البداية بعض التعاريف الهامة والتي تساعد الطالب على فهم ما نريد تقديمه، ونقدم هذه المفاهيم دون توسيع أو إسهاب ولكن نقدمه وفق ما تقتضى الضرورة.

(أ) الرمز  $n!$  يقرأ (مضروب  $n$ ) ويعرف بالصورة

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots 3.2.1., \quad 0! = 1$$

فمثلاً مضروب خمسة

$$5! = 5.4.3.2.1$$

لاحظ أن

$$5! = 5.4! = 5.4.3! = 5.4.3.2! = \dots$$

(ب) الرمز  ${}^nC_r$  نقرأه ( $n$  توافق  $r$ ) والحرف  $c$  مأخوذ من الكلمة combination وتعنى توافق ولكن ماذا يعنى هذا الرمز؟ بطريقة بسيطة هو عدد الطرق التى يتم بها اختيار  $r$  من الأشياء من بين  $n$  من الأشياء بصرف النظر عن ترتيبها حيث  $n \geq r$ .

فمثلا عندنا 5 من الطلاب ونريد اختيار 3 منهم للقيام برحلة مطلوب منا تحديد عدد الطرق المختلفة التي نختار بها الثلاث طلاب من الخمسة وهذا ما يعبر عن الرمز  ${}^5C_3$  وتعرف التوافق بالصورة

$${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \Rightarrow {}^5C_3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

إذا قمنا بحساب  ${}^5C_2$  يكون

$${}^5C_2 = {}^5C_3 = 10$$

وهنا نقدم قانون التبسيط في التوافق.

إذا كان  ${}^nC_r = {}^nC_\ell$  فإن إما  $r = \ell$  أو  $r + \ell = n$

ولذلك

$${}^nC_n = {}^nC_0 = 1, \quad {}^nC_1 = n$$

مفكوك ذي الحدين:

إذا كان  $a, b$  عددين حقيقيين،  $n$  عدد صحيح موجب فإن

$$(a+b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 b a^{n-1} + {}^nC_2 b^2 a^{n-2} + \dots + {}^nC_r b^r a^{n-r} + \dots + {}^nC_n b^n$$

ملاحظات:

١- عدد حدود المفكوك يساوي  $n+1$ .

٢- أسس  $a$  متناقص بالتدرج بمقدار واحد بينما أسس  $b$  متزايد

بالتدرج بمقدار واحد بحيث يكون مجموع أسس  $a, b$  يساوي  $n$

في كل حد.

مثال: أوجد مفكوك  $(a+b)^4$

كنا قبل اكتشاف باسكال لهذه النظرية نضرب  $a+b$  أربع مرات وهذا الأمر

ليس سهلا خصوصا إذا كان الأس عدد كبير  $(a+2)^{15}$  هل سنضرب ١٥ مرة؟

بالطبع لا سوف نستخدم مفكوك ذي الحدين

$$(a+b)^4 = {}^4C_0 a^4 + {}^4C_1 b a^3 + {}^4C_2 b^2 a^2 + {}^4C_3 b^3 a + {}^4C_4 b^4$$

وبحساب التوافيق الموجودة من المفكوك

$${}^4C_0 = {}^4C_4 = 1, \quad {}^4C_1 = {}^4C_3 = 4, \quad {}^4C_2 = 6$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4ba^3 + 6b^2a^2 + 4b^3a + b^4 \quad \text{إذن}$$

وهكذا حصلنا على مفكوك  $(a+b)^4$  أعد قراءة الملاحظة المكتوبة تحت المفكوك.

## Appendix (5)

### الهندسة التحليلية Analytical Geometry

١- ميل المستقيم المار بالنقطتين  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$  يساوى

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{فرق } y}{\text{فرق } x}$$

\* إذا كان  $\ell_1, \ell_2$  مستقيمين ميلاهما  $m_1, m_2$  فإن

$$\ell_1 // \ell_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

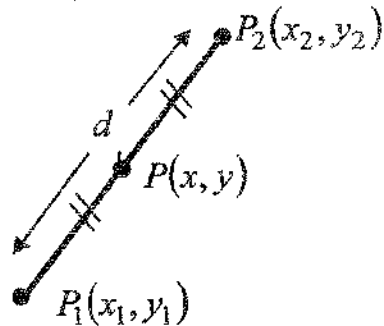
$$\ell_1 \perp \ell_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

\* المستقيم الذى يوازي محور  $x$  ميله يساوى صفر

\* المستقيم الذى يوازي محور  $y$  ميله غير معرف.

٢- البعد بين النقطتين  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$  يعطى بالعلاقة

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



احداثيات نقطة المنتصف  $P$  بين النقطتين  $P_1, P_2$  هى

$$P(x, y) = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

٣- معادلات الخط المستقيم

\* معادلة المستقيم الذى ميله  $m$  ويمر بالنقطة

هى  $(x_1, y_1)$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

معادلة المستقيم المار بالنقطتين  $P_1, P_2$  هي \*

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

معادلة المستقيم الذي ميله  $m$  ويقطع جزء طوله \*

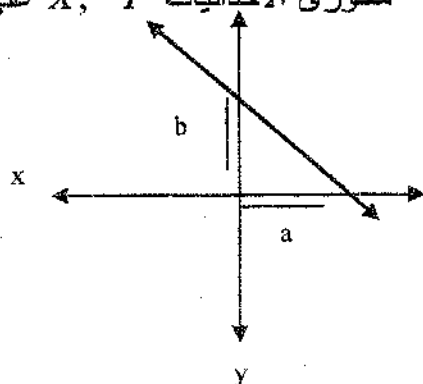
$c$  من محور  $y$  هي

$$y = mx + c$$

معادلة المستقيم الذي يقطع الجزأين  $a, b$  من \*

محورى الاحداثيات  $X, Y$  على الترتيب هي

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم هي \*

$$ax + by + c = 0, \text{ حيث } a, b, c \text{ أعداد حقيقية وميله } -\frac{a}{b}$$

٤- طول العمود المرسوم من النقطة  $P_1(x_1, y_1)$  إلى المستقيم

$ax + by + c = 0$  يعطى بالعلاقة

$$d = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

